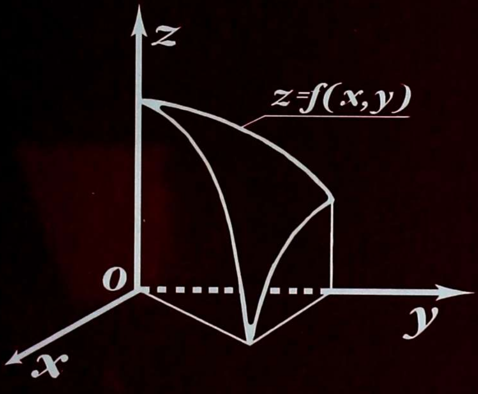
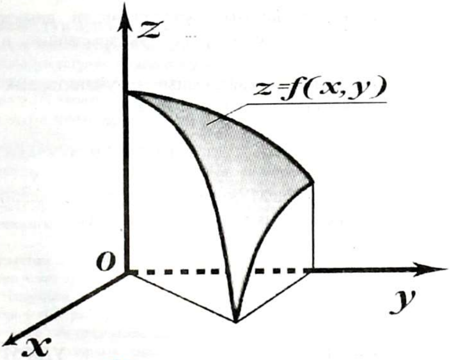
Сопуев У.А.

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА



Сопуев У.А.

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА



УДК 51
ББК 22.11
С 64

Рецензент – физика–математика илимдеринин доктору, профессор Матиева Г.М.

Сопуев У.А.
С 64 Жогорку математика: Окуу колдонмо. – Ош: “Кагаз Ресурстары” басмаканасы, 2015. - 168 б.

ISBN 978 – 9967 – 03 – 691 - 8

Окуу колдонмо Кыргыз Республикасынын жогорку окуу жайларында жогорку математиканы окутуунун Мамлекеттик стандартына ылайык гуманитардык адистиктердеги студенттер үчүн түзүлгөн.

Математикалык негизги түшүнүктөрдүн аныктоолору жана методдору, типтик маселелердин чыгарылышынын мисалдары келтирилген.

Жогорку окуу жайларынын гуманитардык багыттагы адистиктерде окуган студенттерине арналат.

Окуу колдонмо ОшМУнун Окумуштуулар Кеңешинин чечими менен жарык көрүүгө сунушталды.

С 1602010000 – 11
ISBN 978 – 9967 – 03 – 691 – 8

УДК 51
ББК 22.11

МАЗМУНУ

КИРИШ СӨЗ

Математика – бул чыныгы дүйнөнүн сандык катыштарын жана мейкиндик формаларын үйрөтүүчү илим. Математика деген сөз грек тилинен алынып, *maunma* – "окуу, илим" – дегенди билдирип, "ой жүгүртүү аркылуу үйрөнүү" дегенди түшүндүрөт.

Гуманитардык адистиктердин студенттерине математиканы анын өнүгүү тарыхы менен бирдикте окутуу абзел.

Буга кээ бир математикалык түшүнүктөрдүн келип чыгышы тууралуу маалыматтар, белгилүү математиктердин биографиялары, математикалык идеялардын келип чыгышы жана математикалык ачылыштардын тарыхы менен таанышуу кирет.

Математикалык билим берүүнүн экинчи жагы – математиканын турмушта колдонулушун изилдөө.

Математиканын гуманитардык потенциалы бир канча багыттарда ачылат:

1. Математика реалдуу процесстердин математикалык моделин үйрөнөт жана ал математикалык моделдер математикалык тилде жазылат. Математикалык тилди билген адам, болуп жаткан реалдуу процесстердин мазмунун тереңирээк түшүнүшү жана курчап жаткан мейкиндикте туура ой жүгүртүүсү мүмкүн.
2. Математика "акылды жайына келтирет" деген сөз бекеринен эмес. Баарыбызга белгилүү болгондой, математика ой жүгүртүүнүн жана адамдын инсан катары калыптанышына түздөн-түз таасирин тийгизет.
3. Математикалык түшүнүктүн аныктоосун чечмелеген жана математикалык далилдөөнү жүргүзгөн адам кадимки кеп эмес предметтик кеп менен иш алып барат. Ал предметтик кеп белгилүү эрежелер менен түзүлөт (кыска-нуска, тактык, локалдуулук, минимизация ж.б.). Предметтик кеп кадимки (адабий) кептин өнүгүшүнө да чоң таасирин тийгизет.
4. Математиканы үйрөнүү менен адам баласы өзүнүн өнүгүүсүн, "акылына толуусун" баамдайт.

Математикалык билим берүүнү болочок адистин фундаменталдык даярдыгынын негизги түзүүчүсү катары эсептөө керек. Анткени, математика колдонмо маселелерди чечүүдөгү күчтүү курал гана болбостон, илимдин колдонмо универсалдуу тили, ошондой эле жалпы маданияттын элементи да болуп эсептелет.

"Математика" курсун окутуунун негизги максаты - **логикалык ой жүгүртүүнү өстүрүү**. Студенттин математиканы окутуу процессинде логикалык ой жүгүртүүсү калыптануу менен бирдикте ал абстракциялоо сапатына ээ болот жана "абстракттуу, бири-бири менен байланышпаган объектилер" менен иштөөнү үйрөнөт.

Студенттердин азыркы коомдо толук кандуу динамикалык түрдө адаптация болуусу үчүн алардын ой жүгүртүүсүнүн сапатын калыптандыруу зарыл.

Мамлекеттик билим берүү стандарты

(багыттар: юриспруденция, психология, филология, социология, социалдык иш, философия, журналистика, тарых, лингвистика ж.б.)
болочок адис математика жана информатика областында төмөнкү түшүнүктөргө ээ болушу керек:

• математиканын азыркы дүйнөдөгү, дүйнөлүк маданиятта жана тарыхтагы орду жана ролу жөнүндө;
• математикалык ой жүгүртүү жана принциптери, индукция жана дедукция, математикалык далилдөөлөр жөнүндө;
• көптүктө логикалык, топологиялык жана алгебралык структуралар жөнүндө;
• Евклиддик эмес геометриялык системалар жөнүндө;
• математикалык моделдөө жөнүндө;
• информация, аны сактоо, кайра иштеп чыгуу жана жөнөтүү жөнүндө;
• математиканын жана информатиканын гуманитардык изилдөөлөрдөгү ролу жөнүндө.

Стандарт боюнча математикадан коюлуучу суроолор:

- Евклиддин геометриясы биринчи табигый-илимий теория катарында;
- Аксиоматикалык метод;
- Азыркы математиканын калыптануусунун негизги этаптары;
- Азыркы математиканын структурасы;
- Математикалык ойлонуунун негизги мүнөздөөчүлөрү;
- Математикалык далилдөөлөр;
- Көптүктөр, элементтери, катыштар, чагылтуулар;
- Сандар;
- Комбинаторика;
- Чектүү жана чексиз көптүктөр;
- Көптүктөгү негизги структуралар;

- Евклиддик эмес геометрия;
- Математикалык анализдин негизги идеялары;
- Дифференциалдык теңдемелер;
- Чечимди кабыл алуу маселесинин жалпы коюлушу;
- Максаттуу иш аракеттеги математикалык методдор;
- Кокустуктардын математикасы;
- Ыктымалдуулуктар теориясынын элементтери;
- Математикалык статистиканын негизги түшүнүктөрү;
- Гипотезаларды текшерүүдөгү математикалык методдор;
- Гуманитардык илимдердеги математиканын ролу.

Курстун материалы разделдерге, өзүнчө темаларга бөлүнгөн. Башка окуу колдонмолору сыяктуу эле окурмандын активдүү иш аракети талап кылынат(берилген көнүгүүлөрдү чыгаруу, өз алдынча иштерди аткаруу ж.б).

Математика курсу төмөндөгүдөй разделдерден турат:

I. Математиканын негизи

II. Вектордук алгебра жана аналитикалык геометрия

III. Математикалык анализдин негиздери.

Жогорку математика курсунун программасы абдан кеңири болгондугу азыркы коомдо илимдерди математикалаштыруу процесси жүрүп жатқандыгы жана Мамлекеттик билим берүү стандартынын талаптары менен байланышкандыгында. Бирок, конкреттүү математикалык суроолор математикалык адистиктердей деңгээлде каралышынын зарылчылыгы жок.

Тигил же бул колдонмо менен иштөөдө аныктамаларга көңүл буруңуздар. Аларды жаттоого шашпастан, аны түшүнүүгө жана ички логикасын сезүүгө аракет кылыңыздар. Далилдөөнү жана жыйынтыктар мазмунун түшүнбөй эле да жаттап алуу бизге белгилүү, бирок анын эч кандай пайдасы жок. Кээде далилдөөсүн түшүнүп, эмне үчүн, эмне жасалып жатканын сезип, бирок, ушуга окшош эле ситуацияда аналогиялык иш аракетти колдоно билбешибиз мүмкүн. Бул учур жаттоого караганда бир топ жакшы, бирок баары бир жетиштүү эмес.

Эгерде студент өз алдынча аналогиялык жыйынтыкты алса жана берилген маселеге колдоно билсе, анда материал түшүнүктүү болду деп эсептейбиз.

Бул окуу колдонмо математикалык эмес адистиктерде окуган студенттер үчүн арналат.

Колдонмо боюнча ой-пикириңиздерди, сунуштарыңыздарды **ulansopuev@mail.ru** электрондук дарегине жөнөтсөңүздөр болот.

I БӨЛҮМ. МАТЕМАТИКАНЫН НЕГИЗДЕРИ

1-ГЛАВА. МАТЕМАТИКАНЫН МЕТОДОЛОГИЯЛЫК ПРОБЛЕМАЛАРЫ ЖАНА ПРИНЦИПТЕРИ

1.1. Математика предмети

Математиканын предметин аныктоо үчүн адабиятта эки жолу бар. Биринчи аныктама Ф. Энгельс тарабынан, экинчиси – псевдоними Н. Бурбаки аркылуу таанымал болгон француз математиктеринин коллективи тарабынан берилген.

Ф. Энгельс “Таза математика – бул өзүнүн обьекти катары чыныгы дүйнөнүн сандык катыштарын жана мейкиндик формаларын, б.а. реалдуу материалды карайт. Бул материал кескин түрдө абстракттуу формаларын кабыл алышы мүмкүн, ошондуктан ал сырткы дүйнөдөн пайда болгондугун өтө аз күмөн санатат” деп айткан. Бул сүйлөм математиканын толук аныктамасы болбойт, себеби анда эч кандай методго, математиканын үйрөнүүнүн эч кандай максатына көрсөтмө жок. Бирок ал сүйлөм изилденүүчү обьект адам баласынын аң сезими менен каалагандай эле эмес, чыныгы дүйнөгө байланышып жаралгандыгын чагылдырат.

Экинчи аныктамада Н. Бурбакинин методологиялык установкалары чагылдырылат. Бурбаки дагы математиканы эмес, ал изилдеген обьекттерди аныктайт. Алардын аныктамасын берүүдөн алдын, математикада изилденүүчү обьекттерге болгон жаңы подход “аксиоматикадагы революция” менен байланышкандыгын белгилеп кетели. Анын маңызы - конкреттүү мазмундуу аксиоматикадан биринчи абстрактык аксиоматикага, андан кийин толук формалдык аксиоматикага өтүшүндө жатат.

Евклиддин аксиоматикасына окшош конкреттүү мазмундуу аксиоматикада алгачкы түшүнүктөр жана аксиомаларынын интерпретациясы жалгыз системага ээ. Ал система идеалдуу болсо да, бирок конкреттүү обьекттерге ээ. Буга карама-каршы абстракттуу аксиоматика чексиз көп интерпретацияларга жол берет. Формалдык аксиоматика абстракттык аксиоматиканын негизинде пайда болот жана андан биринчиден, жыйынтык чыгаруу эрежелеринин так берилиши менен, экинчиден, мазмундуу ой жүгүртүүнүн ордуна ал символдордун жана формулалардын тилин колдонот. Мына ушундан, мазмундуу ой жүгүртүүлөр бир формулалардан экинчи формулаларга келтирилет, б.а. эсептөөнүн өзгөчө түрүнө келтирилет. Ошондуктан, бир эле аксиомалар ар түрдүү өзүнчө бир конктреттүү мазмундуу обьекттердин касиеттерин жана катыштарын баяндайт (сүрөттөйт).

Бул фундаменталдык идея абстракттык структуралардын түшүнүктөрүнүн негизинде жатат. Н. Бурбаки азыркы математиканы негиздөөдө эң маанилүү ролду ойногон үч негизги структуралардын типтерин сунуштайт.

Алгебралык структуралар. Мындай структураларга мисал катары группалар, алкактар жана талаалар мисал боло алат. Алгебралык структуралардын негизги характеристикалары (мүнөздөмөлөрү):
кандайдыр бир A көптүгүндө аксиомалар системасы менен сүрөттөлүүчү тиешелүү касиеттери менен чектүү сандагы операциялардын берилиши. A көптүгүнүн элементтери катары математикалык обьекттер (сандар, матрицалар, которулуулар, векторлор) жана математикалык эмес обьекттер болушу мүмкүн.

Тартип структурасы. Каралуучу көптүктө тартип катышы берилиши аркылуу мүнөздөлөт (сандык көптүктөрдөгү салыштыруу). Ал үчүн рефлексивдүүлүк, симметриялуулук жана транзитивдик касиеттери орун алат.

Топологиялык структуралар. Эгерде M көптүгүнүн ар бир элементине тигил же бул ыкма менен ушул элементтин чеке бели деп аталуучу бул көптүктүн көптүкчөлөрүнүн көптүгү тиешелеш коюлса, анда M көптүгү ***топологиялык структурага*** ээ деп аталат. Чекиттин бул чеке белдери анык бир аксиомаларды канаатандыруусу керек (топологиялык структуралардын аксиомаларын). Топологиялык структуралардын жардамында "чеке бел", "предел", "үзгүлтүксүздүк" деген түшүнүктөр так аныкталат.

Структуралардын негизги үч тибинен (жаратуучу) башка математикада татаал структураларды кароого туура келет, мында жаратуучу структуралар бириктирүүчү аксиомалар системасынын жардамында органикалык байланышат. Мисалы, чыныгы сандардын көптүгү татаал структура болуп эсептелет, анткени буга үч негизги жаратуучу структуралар кирет.

Ар түрдүү түшүнүктөрдүн жалпы өзгөчөлүгү катары "Математикалык структура" деп аталышынын себеби болуп алардын элементтеринин жаратылышы аныкталган эмес көптүктүн элементтери үчүн колдонулгандыгында. Структуранын аксиоматикалык теориясын тургузуу – бул деген структуранын аксиомаларынан логикалык корутундуларды келтирип чыгаруу учурунда каралуучу обьекттердин жаратылышы тууралуу ар кандай гипотезаларды эске албоо дегенди билдирет.

Жогорудагы айтылгандардан Н. Бурбаки төмөнкүдөй корутунду кылышат: “Өзүнүн аксиоматикалык формасында математика абстракттык формалардын – математикалык структуралардын жыйындысынан турат жана кээ бир эксперименталдык чындыктын аспектилери алдын ала аныктоонун жыйынтыгында бул формалардын кээ биринде бардай болуп сезилет”

Мына ошентип, Н. Бурбаки боюнча математика – бул чыныгы дүйнөгө эч кандай тиешеси жок “математикалык структуралардын жыйындысы”. Математикага болгон мындай көз караштты көпчүлүк окумуштуулар туура деп эсептешкен жана Ф .Энгельстин математикага берген аныктоосун эскирип калган дешкен.

Математиканын изилдөө обьекттеринин аныктоосуна эки подходдун тиешелештикке коюусун математикалык билимдердин өнүгүшүнүн тарыхын анализдөө позициясы аркылуу гана жүргүзүү мүмкүн. Академик А.Н. Колмогоров математиканын өнүгүүсүн төрт мезгилге бөлөт:

Математиканын жаралуу мезгили б.з.ч. VI-V кылымдарга таандык. Мында математика өз алдынча илим болуп, өзүнүн предмети жана методдору пайда болот.

Б.з.ч. 3000 – жылдары Вавилондуктар квадраттык теңдемелерди чечүүнү билип жана азыркы математикада Пифагордун теоремасы деген ат менен белгилүү болгон теореманы билишкен. Бул замандын адамдары практикалык маселелерди чыгаруу үчүн көп сандаган, бирок бири-бири менен байланышпаган эрежелер жана формулаларды билишкен: жер участкасын ченөө, календарларды түзүү, курулуш ж.б. Тилекке каршы, алар колдонгон математикалык маалыматтар кантип алынган деген маалымат бизге жетпей калды.

Математиканын өнүгүүнүн экинчи мезгили – ***элементардык математиканын мезгили****: б.з.ч.* VI-V кк. б.з. XVI к. чейин.

Математика байыркы гректерде логикалык корутунду жана жаратылышты таануу жолу болуп келген. Байыркы гректердин математиканы жаңыча түшүнүү жана анын ролу жөнүндө мындай ойго келгени тууралу документтер сакталган эмес. А.Н. Колмогоров грециялык мамлекеттердин математикалык илимдин мүнөзүнүн өзгөрүшүнүн себеби коомдук – саясий, маданий жашоосу өнүккөн, диалектиканын жана мелдештерди жүргүзүүнүн искусствосунда жатат деп эсептейт. Бул мезгилде гректер жаратылыш рационалдуу түзүлгөн деп ойлошкон жана дүйнөдө болгон бардык кубулуштар так жана өзгөрүүсүз план боюнча жүрөт, акыры барып математикалык болот дешкен. Дедуктивдүү, аксиоматикалык методдордун башталышын да байыркы грециялыктар башташкан.

Б.з.ч. IV кк. Дедуктивдүү илимдин логикалык система катары курулушунун принциптери сунушталган, анын негизинде – аксиомалар болгон.

Евклид (б.з.ч. 365-300 жж.)

Дедуктивдүү теориянын өнүгүшү биринчи кезекте Аристотелдин (б.з.ч. 384-322 кк.) аты менен байланышкан.

Эң алгачкы математиканы (геометрияны) системалаштырылган дедуктивдүү баяндоо Евклидке (б.з.ч. 300 кк.) таандык – бул Евклиддин "Башталышы" аттуу эмгеги. Бул эмгек 20 кылым бою өзүнүн логикалык тактыгы, аксиоматикалык метод менен үлгү болуп келген.

2000 жылга жакын геометриянын аксиомаларын тургузуу жана логикалык пробелдерди жоюу боюнча биринчи ийгиликтер XIX кылымдын аягында гана Паша (1882), Реано (1889), Пиеринин (1889) иштеринде жетишкен. Мына ошентип, Байыркы Грецияда практикалык геометриядан теориялык геометрияга кадам башталган.

И. Ньютон (1642-1727)

Үчүнчү мезгил - ***Өзгөрмө чоңдуктарды кийирүү мезгили*** (XVII, XVIII кк., XIX кк. башы). Бул мезгил Р.Декарттын (1596 -1650) аналитикалык геометриясында өзгөрмө чоңдуктарды кийирүү жана И. Ньютон(1642 - 1727), Г. Лейбництин иштеринде дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдүн жаралышы менен белгилүү. Ньютондун негизги багыттары физика, механика, астрономия жана математика болгон. Математика Ньютон үчүн жаратылыш жөнүндө илимдин бир бөлүгү катары болуп, физикалык изилдөөлөрдүн куралы деп эсептеген. Ал тарабынан иштелип чыккан флюксиялар методу кыймылды жана аны менен байланышта болгон ылдамдык жана ылдамдануулу изилдөө үчүн математикалык аппарат катары колдонгон.

Лейбництин математикалык иштери анын философиялык көз карашы менен тыгыз байланышта болгон. Ал үчүн илимий таанып билүүнүн универсалдуу методу "жалпы характеристиканы" түзүү болгон. Математиканы Лейбниц мүмкүн болгон байланыштардын чагылуусу, элементтердин көз карандылыгы, катыштарды формула түрүндө, өзгөчө эсептөө - дифференциалдык түрдө көргөн. Жаңыча эсептөөнүн негизи – чексиз кичине чоңдук болуп, ал чоңдук интуитивдик элестөөлөр катары гана болгон.

Ньютондун жана Лейбництин иштериндеги чексиз кичине чоңдуктар жөнүндө маалымат жетишээрлик деңгээлде эмес болсо да, геометрия, механика, физика жана колдонмо илимдердеги эң негизги маселелерди чечүүгө мүмкүнчүлүк болгон. XIX кылымдын экинчи жарымында гана чыныгы сандар теориясы түзүлгөн. Математикалык анализдин бардык пайдубалын так логикалык негизде курууга мүмкүнчүлүк түзүлдү.

Ф. Энгельстин берген аныктоосу математикалык илимдин пайда болгондон баштап XIX кылымдын ортосуна чейинки өнүгүшүн чагылдырат. Математиканын өнүгүшүнүн негизги булагы болуп практиканын жана физиканын талаптары болуп келген (механика жана оптика). Математикалык теория процесстердин сандык (метрикалык) мүнөзүн чагылдырган.

XIX кылымдын ортосунан тартып Н. Бурбакинин аныктоосу боюнча математиканын өнүгүшүнүн төртүнчү мезгили башталат. Ушул убакытка чейинки математиканын абалы төмөндөгү өзгөчөлүктөр менен мүнөздөлөт.

Биринчи өзгөчөлүгү. XVII жана XVIII кылымдарда топтолгон аябай чоң фактылык материал терең логикалык анализдин жана аны жаңы көз караштын негизинде бириктирип чыгуу зарылчылыгы пайда кылган. Математиканын табият таануу менен болгон байланышы барган сайын татаал форманы ала баштаган. Чоң жаңы теориялар практиканын, табият таануунун техниканын талабынан эле эмес математиканын өзгөчө ички талаптарынан да пайда боло баштады. Аладын ичинен негизгилери: функциялар теориясынын өнүгүшү, группалар теориясы, Евклиддик эмес геометриянын түзүлүшү.

Экинчи өзгөчөлүгү - математиканын колдонулушунун кеңейиши. Буга чейин математика физикада, механика, оптикада колдонсо, ал эми азыр электродинамика, магнетизм жана термодинамика теорияларында колдонулат. Техниканын муктаждыктары математикада өтө тездик менен өстү: баллистика, машина куруу ж.б.

Үчүнчү өзгөчөлүгү – математиканын аксиомаларын критикалык жактан кайра карап чыгуу, аныктамалар жана далилдөөлөр системасынын так тургузулушу жана бул далилдөөлөрдү колдонулуучу логикалык приемдордун критикалык каралып чыгышы менен шартталган. Г.И. Рузавин бул мезгилдин математикасы жөнүндө төмөндөгүдөй деп жазат: «Эгерде мурда математиканын изилдөө предмети болуп чоңдуктар менен мейкиндик формаларынын ортосундагы метрикалык катыштар болсо, ал эми XIX кылымдын ортосунан тартып жаратылышы метрикалык эмес болгон обьектилердин өз ара байланышынын анализине айланып бара жатат». Математиканын изилдөө областынын кеңейиши түшүнүктөрдүн жана теориялардын абстракттуулугунда.

Математикага болгон көз караштардын революциялык бурулушу анын негизделиши, аксиоматикалык методдордун жаңы түшүндүрүлүшү менен байланышкан.

Н. И. Лобачевский (1792-1856)

Н.И. Лобачевский 1826 – жылы чоң ачылыш жасаган. Параллелдүүлүк жөнүндө Евклиддин бешинчи постулатын тануу менен алмаштырылышы ("Түз сызыкта жатпаган чекит аркылуу аны менен кесилишпеген бир канча түз сызык жүргүзүүгө болот") жана абсолюттук геометриянын аксиомаларынын системасынын корутундулары (параллелдүүлүк аксиомасынан башка Евклиддин бардык аксиомалары аткарылат) жана Лобачевскийдин параллелдүүлүк аксиомалары логикалык каталыктарга алып келген эмес.

Лобачевскийдин геометриясы Евклиддин геометриясы сыяктуу эле сымбаттуу жана бай геометрияны пайда кылып, математикага көз карашты өзгөрттү. Жаңы геометрияны түзүү боюнча бири-бирин четке какпайбы деген суроону карoo зарылчылыгы пайда болду. Мына ушундан улам аксиоматикалык методдун андан ары өнүгүшү башталды:

1) бирин бири четке какпастыгы проблемасы, анын толуктугу жана аксиомалар системасынын көз карандылыгы чечилди.

2) аксиоматикалык теорияга жаңы көз караш пайда болду. Бул проблемаларды чечүү Д. Гилберт (1862-1943) тарабынан сунушталган.

Д. Гильберт аныктаган аксиоматикалык методдун маңызын төмөндөгүчө баяндоого болот:

1. Абстракттык теория тургузулат. Анын негизинде эки маанилүү терминдер жатат: кээ бири бир нече көптүктөрдүн элементтерин белгилешет (мисалы, “чекит”, “түз сызык”, ж.б.), башкалары – бул элементтердин арасындагы катыштарды белгилейт (мисалы, “жатуу”, “арасында” ж.б.) Бул терминдердин азырынча эч кандай мааниси жок, алар азырынча жөн эле сөздөр.

Терминдер канааттандыруучу аксиомалар аныкталат. Аксиомалардан логикалык корутундулар (теоремалар) чыгарылат. Сүйлөмдөрдү азайтуу үчүн аныктоолор киргизилет.

2. Абстракттуу теориянын терминдерине мазмундуу маани ыйгарылат. Мына эми алардын ролу өзгөрөт, алар кандайдыр бир түшүнүктү билдирет. Бул түшүнүктөр үчүн абстракттуу теориянын аксиомалары аткарыларын текшерип коюу керек.

Абстракттуу теориянын мазмундуу маани ыйгаруу жолу менен алынган система модель же ушул теориянын интерпретациясы деп аталат.

Аксиоматикалык методго болгон жаңы көз караш геометрияга болгон мурдагы элести түп тамырынан бери өзгөрттү.

Мына ошентип, Н. Бурбакинин математикага болгон “абстракттык, маанисини кармабаган, математикалык структуралардын топтолушу” аксиоматикалык методду жаңыча түшүнүүгө түрткү болду.
Бирок, Бурбаки мындайча жакындоосу негативдик мамилени да кезиктирет, себеби алар карап жаткан структуралардын чыныгы дүйнөгө болгон катышы кызыктырбаган.

Советтик математиктер А.Н. Колмогоров, А.Д. Александров, В.В. Гнеденконун көз караштарын карап көрөлү.

Алардын айтуусу боюнча Энгельстин доорунда (мезгилинде) математика чоңдуктар менен мейкиндик формаларынын ортосундагы сандык катыштарды үйрөнгөн. Азыр ал абстракттык структуралар менен категорияларды үйрөнүүгө көтөрүлгөн. Чындыгында, математикада болуп өткөн сапаттык өзгөрүүлөр сандык катыштарды изилдөөгө кеңири жана терең мүмкүнчүлүк берет.

Математикада үйрөнүлүп жаткан сандык катыштар менен мейкиндик формалары аябай кеңейип, аларга каалаган группанын элементтеринин ортосундагы мамиле, векторлор, функционалдык мейкиндиктеги операторлор ж.б. да кире баштайт деген жыйынтыкка А.Н. Колмогоров келет.

“Сандык катыштар” жана “мейкиндик формалары” терминдерин мындай кеңири мааниде кароо математика илими чыныгы дүйнөнүн сандык катыштар жана мейкиндик формалары аныктоосун азыркы мезгилдин математикасынын өнүгүшүндө колдонсо да болот.

Бул позицияны А.Д. Александров да тең бөлүшөт: математикада чындыктан абстрактталган форма жана катыштарды эле карабастан, алардан аныкталган логикалык түрдө мүмкүн болгон да формаларды жана катыштарды карайт.

Б.В. Гнеденко көңүлдү төмөнкүгө бурат: азыркы математиканын каалаган бутагы чындыгында математикалык структураларды окуп үйрөнсө, Н. Бурбаки тарабынан берилген аныктама Ф. Энгельстин берген аныктоосу менен антагонисттик мамиледе болбой кандайдыр бир позицияларда аны толуктап турат.

Келтирилген маалыматтарды жыйынтыктоо иретинде, математиканын аныктоосуна математикалык структуралар аркылуу жакындоо математикалык таанып билүүнүн белгилүү бир этабынын туюнтулушу катары айтса болот. Математика дүйнөнү, анын мейкиндик формаларын жана сандык катыштарын таанып билүүнүн анык бир инструменти катары болуп келген жана боло берет. Азыркы учурда, жогоруда айтылгандай, бул "инструмент" татаал процесстерди жана кубулуштарды изилдөөгө, анын ичинде метрикалык эмес жаратылышты изилдөөгө кирип баратат. Бул фундаменталдык философиялык, методологиялык абалды баамдоосуз (түшүнүүсүз) дүйнө жөнүндө жалпы картинаны бүтүндөй элестөөнү түзүү мүмкүн эмес.

Математика башынан эле тактыгынын деңгээли, өзүнүн фундаменталдык жоболорунун тууралыгынын карама-каршы келбестиги менен "өзгөчө" илимдин статусуна талапкер.

1.2. Математикалык тил: өзгөчөлүгү, пайда болушу жана өнүгүшү

Математика ушунчалык өнүп, өсүп ар тараптуу болуп калды. Мазмундуу баяндоого мүмкүн болбой, бирок аны функционалдык көз караш менен табият таануу жана техниканын тили катары, бизди курчап турган дүйнөнү таанып билүү тили жана инструменти катары мүнөздөсө болот.

Ар түрдүү ишкердүүлүктөрдүн аймактарында "өзүнүн" (жасалма) тили иштелип чыгат, мисалы: чертеж – техникада, химиялык формулалар жана теңдемелер – химияда. Орус менен орусча сүйлөшүү керек, англичанин менен - англисче, француз менен

- французча, ал эми жаратылыш менен - математикалык тилде. Мына ошондо гана жаратылыш бизге өзүнүн сырларын ачат.

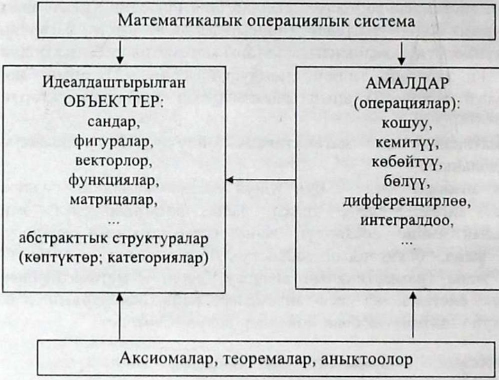
Математикалык тил кантип түзүлгөн? Эң алгач бул тил биздин конкреттүү тилдерде бир сөздүн анык бир маанисин билдиргенге карама-каршы, ал абстракттуу. Математикалык формулалардын жана белгилердин тили абдан чоң универсалдуулукка ээ, ал адам затынын бардык ишмердүүлүк сфераларында колдонулат. Математикалык белгилердин системасы миңдеген жылдар бою иштелип чыгып адам затынын мурасы болуп эсептелет. Табигый тилди ар түрдүү багыттар боюнча өркүндөтүүнүн жыйынтыгы катары математикалык тил болуп эсептелет: 1) табигый тилдин чоңдугун жоюу, 2) анын эки маанилүүлүгүн жоюу, 3) анын ачыктыгынын мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтүү.

Математикалык тил – математикалык ойдун туюнтуу каражаты катары пайдаланылат.

Кенен мааниде тил – бул ушул тилде жазылган сөздүк, грамматика, аңгеме, баян, пьеса жана романдар. Ал эми математикалык тилде сөздөрдүн жана грамматиканын аналогу, аңгемелер жана баяндардын аналогу болуп эмне эсептелет? Сөздөрдүн жана грамматиканын аналогу болуп - математикалык операциялык система, ал эми аңгемелер жана баяндардын ж.б. аналогу болуп – математикалык моделдер болуп эсептелет.

Математикалык тилди билүү математикалык түшүнүктөрдүн мазмунун, алардын ортосундагы катыштарды (аксиомалар, теоремалар) аң-сезимдүү өздөштүрүүнү божомолдойт жана оозеки жана жазуу түрүндө рационалдуу, сабаттуу математикалык ойду математикалык тилдин каражаттары менен туюнтууну билдирет. Практикада да математикалык билимдерди эркин колдонот.

Математикалык тилди үйрөнүү ойду рационалдуу туюнтуу шыгын пайда кылат: удаалаштык, тактык, ачыктык (дааналык), кыскалык, үнөмдүүлүк, маалыматка ээ болуу. Аң-сезимдүү жана эркин түрдө математикалык тилди билүү математикалык маданияттуу болуунун шарты жана каражаты болуп эсептелет.



Тилдин кемчиликтери:
- ✓ Спецификалуулугу;
- ✓ Чагылтуунун чектелген мүмкүнчүлүгү.

Тилдин татыктуулугу:
- ✓ Символдордун жардамында ойдогу операцияларды кыскача туюнтуу мүмкүнчүлүк берет;
- ✓ Чоң прогноздоо күчү менен айырмаланат.

Абстракттуу элементтердин көптүгү жана алар менен кошо амалдар операциялык системаны түзөт: элементтер - булар сандар, векторлор, функциялар, матрицалар ж.б., ал эми амалдар (операциялар) – кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү, дифференцирлөө, интегралдоо ж.б.

Операциялык системада өнүгүүнүн жана максатка жетүүнүн так ички мотивдери бар: бул операциялардын аткарылгандыгы жана кеңейтүүгө, сүрөттөөгө мүмкүн болгон нерселерди камтуу.

Математикалык операциялык системанын түзүлүшүн жана өнүгүшүнүн тарыхын иллюстрация кылып берели. Мында окуялардын хронологиясына карабастан, алардын логикалык келип чыгышына карайбыз: бардыгы бүтүн сандан башталган. Андан кийин алардын үстүнөн аткарылуучу амалдар пайда болду: кошуу жана ага тескери амал – кемитүү; көбөйтүү жана бөлүү. Бөлүүнү аткаруу бөлчөк сандарды кийирүү, ал эми кемитүүнү аткаруу – терс сандарды кийирүү менен чечилген.

Чыныгы сандар гректер үчүн – ташка урунгандай болгон. Ал сандар Дедекинддин рационалдык сандар кесилишиндеги жана Вейерштрасстын жыйналуучу удаалаштыктарында түшүндүрмөсүн тапканда гана грек математиктерин канааттандырды.

Мына ошентип, дайыма бул сандар менен кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү, пределин табуу амалдары аткарылат.

Чыныгы сандардан кийин, квадраттык теңдемелердин чыгарылышынын туюкталышы катары комплекстик сандар пайда болду. Комплекстик сандарды кийирүү менен каалаган алгебралык теңдемени чыгарууга мүмкүнчүлүк түзүлдү. Андан кийин Гамильтон (1805-1865) комплекстик сандардын кеңейтилиши катары кватерниондорду ойлоп тапкан.

Алар көп колдонулбаса да, айрым учурлары – векторлор жана алардын үстүнөн аткарылуучу амалдар (кошуу, кемитүү, скалярдык жана вектордук көбөйтүү) математикада кеңири колдонулуп келе жатат.

Эволюциялык өзгөрүү процесстерин изилдөө муктаждыгы өзгөрмө чоңдуктардын пайда болушуна, андан кийин алардан функцияга, дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөргө, дифференциалдык теңдемелерге алып келди.

Көптүктөр жана алардын үстүнөн аткарылуучу амалдар (биригүү, кесилишүү, толуктоо, көбөйтүү) ж.б. пайда болду.

Мына ошентип, операциялык система заманбап функционалдык анализ жана операторлор теориясы менен толукталды. Бирок бул операциялык система физикага микро дүйнөнүн кубулуштарын сүрөттөө үчүн муктаж болгонго чейин эле өзүнүн ички өнүгүүсүнөн сызыктуу операторлор теориясы келип чыкты.

Операциялардын принципиалдуу аткаруучулугунан сырткары, бул аткаруучулуктун фактылык аткаруучулугу, жонокөйлүгү жана бул аткаруучулуктун жеткиликтүүлүгү эң чоң мааниге ээ. Байыркы гректер көбөйтүүнү кыйынчылык менен аткарган, мисалы, 473 жана 328 сандарын CDLXXIII жана CCCXXVIII түрүндө жазган.

Оливер Хевисайд (1850-1925) аткарган ишти өзүнүн замандаштары түшүнүшпөй, интегралдоо операциясын оңой аткарылуучу кылып, комплекстик санга бөлүүгө алып келген жана буга чейин чечилбей келген көп маселелерди чечүүгө жетишкен.

Хевисайд чоң окумуштуу болгон: Атмосферанын жогорку катмарында радио толкундарды чагылдырган иондолгон катмар бар экенин алдын ала айткан; кыймылда болгон электрондун жаркылдоосун эсептеген; илимде Эйнштейндин формуласы деп таанылган атактуу формуланы көрсөткөн.

Азыркы ЭЭМ, эсептөө методдору жана программалоо математикалык операциялык системанын татаал операцияларынын жаңы эффективдүү каражаттарынын иш жүзүнө ашырылышы катары кароо керек.

1.3. Евклиддик геометрия биринчи табигый-илимий теория катары

Геометриянын негизделишинин тарыхы. Азыркы математиканын негизги методу, айрыкча геометриянын, башаты Д. Гильберттин "Геометриянын негиздери" эмгегинен башталган аксиоматикалык метод эсептелет. Геометрия аксиоматикалык теория болушунан алдын узак эмпирикалык өнүгүүнү басып өттү.

Геометрия жөнүндө алгачкы маалыматтар Египетте, Кытайда, Индияда, Байыркы Чыгыш цивилизацияларында табылган, себеби бул өлкөлөрдө жерди иштетүү өнүккөн, бирок сугат жерлер аз болгон. Бул өлкөлөрдө геометрия эмпирикалык мүнөздө болуп конкреттүү маселелерди чыгаруу үчүн бөлүкчө "рецепт-эрежелердин" тобунан турган. Б.з.ч. II миң жылдыкта эле египеттиктер үч бурчтуктун аянтын, кесилген пирамиданын көлөмүн, тегеректин аянтын так эсептөөнү, ал эми вавилондуктар Пифагордун теоремасын билишкен. Алардын далилдөөлөрү жок болгон, бирок эсептөө үчүн эрежелер көрсөтүлгөн.

Геометриянын грециялык өнүгүү мезгили б.з.ч. VII—VI кылымдарда египеттиктердин таасири астында болгон. Греция математикасынын атасы катары эсептелген атактуу философ Фалес (б.з.ч. 640-548 кк.) эсептелет. Фалестин математикалык мектебине теӊ капталдуу үч бурчтуктун, вертикалдык бурчтарынын касиеттеринин далилдөөсү таандык. Байыркы Грецияда азыркы мектеп геометриясынын дээрлик бардык мазмунун камтыган жыйынтыктар алынган.

Пифагордун (б.з.ч. 570-471 жж.) философиялык мектеби үч бурчтуктун бурчтары жөнүндө теореманы ачкан; Пифагордун теоремасын далилдеген, туура көп грандыктардын беш түрү жана өлчөнбөөчү кесиндилердин бар экенин аныктаган. Демокрит (б.з.ч. 470-370 жж.) пирамиданын жана конустун көлөмдөрү жөнүндө теореманы ачкан. Евдокс (б.з.ч. 410-356 жж.) пропорциялардын геометриялык, б.а. пропорционалдык сандардын теориясын түзгөн.

Менехм жана Аполлоний конустук кесилиштерди изилдеген. Архимед (б.з.ч. 289-212 жж.) беттин аянтын эсептөө, шардын жана башка фигуралардын көлөмдөрүн эсептөө эрежелерин ачкан. Ал π санынын жакындаштырылган маанисин тапкан.

Байыркы грециялык окумуштуулардын өзгөчө эмгеги геометриялык билимдерди так тургузуунун проблемасын биринчи болуп коюшкан жана аны биринчи жакындашууда чечишкен. Бул проблема Платон (б.з.ч. 429-348 жж.) тарабынан коюлган. Эӊ чоӊ философ – Аристотель (б.з.ч. 384-322 жж.), формалдуу логиканын негиздөөчүсү болгон. Ага геометрияны тургузуунун идеясынын так баяндалышы сүйлөмдөрдүн чынжырчасына таандык, алар бири-биринен логиканын эрежелеринин негизинде гана келип чыгышат.

Бул маселени көптөгөн грек окумуштуулары чечүүгө аракет кылышкан (Гиппократ, Федий).

Е в к л и д (б.з.ч. 330-275 жж.) — байыркы замандын эӊ ири геометри, Платондун мектебинин окуучусу, ал Египетте (Александрияда) жашаган. Анын "Башталыш" аттуу эмгеги геометриянын башталышын системалуу түрдө баяндаган жана мындай илимий деӊгээлде аткарылган эмгек боюнча көптөгөн кылымдар бою геометрия ушул чыгарма боюнча өтүлгөн. Евклиддин "Башталышы" 13 китептен (главадан) турат:

- ✓ I-VI - планиметрия;
- ✓ VII-IX – арифметика геометриялык баяндоо менен;
- ✓ X - өлчөнбөөчү кесиндилер;
- ✓ XI-XIII — стереометрия.

1-эскертүү. "Башталыш" эмгегинде геометрияда белгилүү болгон бардык маалыматтар киргизилген эмес. Мисалы, конустук кесилиш, жогорку тартиптеги ийрилер киргизилген эмес.

2-эскертүү. Ар бир китеп түшүнүктөргө аныктоо берүү менен башталат. Мисалы, 1- китепте 23 аныктоо берилген. Биринчи төртөөнү карап көрөлү:

1. Чекит - бул бөлүктөрү жок нерсе.
2. Сызык - бул туурасы жок узундук.
3. Сызыктын чек арасы чекиттер.
4. Түз сызык – бул өзүнүн бардык чекиттерине карата бирдей жайгашкан сызык.

Евклид далилдөөсү жок сүйлөмдөрдү келтирип, аларды постулаттарга жана аксиомаларга бөлгөн. Анда **беш постулат** жана **жети аксиома** бар.

1-эскертүү. Евклид постулаттар менен аксиомалардын ортосундагы айырмачылыкты көрсөткөн эмес. Бул маселе азырга чейин толук чечиле элек.

2-эскертүү. Евклид геометриянын теориясын грек математиктери, айрыкча Аристотель талап кылгандай, б. а. ар бир кийинки келген теорема андан мурда келген теоремалардын негизинде далилдене тургандай кылып түзөт. Башкача айтканда, *Евклид геометриялык теорияны так логикалык жол менен өнүктүрөт. Мына ушул факт Евклиддин илимдин алдында тарыхый эмгегин баса белгилеп турат*.

Евклиддин "Башталышы" математиканын жана бүткүл адам зат маданиятынын тарыхында зор ролду ойногон. Бул китептер дүйнөдөгү көпчүлүк тилдерге которулуп, 1482-жылдан кийин 500дөн ашуун басылып чыгарылган.

Евклиддик системанын кемчиликтери. Азыркы математиканын көз карашы менен Евклиддин "Башталышы" эмгеги жетилбеген деп тапса болот. Бул системанын негизги кемчиликтерин айталы:

1) көп түшүнүктөрдүн аныктоолору өзүнө аныкталууга тийиштүү болгон түшүнүктөрдү камтыйт (мисалы, 1 главада 1-4 аныктоолорунда туурасы, узундук, чек ара түшүнүктөрү өз учурунда аныкталуу тийиш);

2) Аксиомалардын жана постулатардын тизмеси геометрияны логикалык жол менен түзүүгө жетишсиз. Мисалы, бул тизмеде геометриянын көп теоремаларын далилдөө үчүн тартип аксиомалары жок, бул кырдаалга Гаусс көңүл бурган. Аталган тизмеде кыймыл түшүнүгүнүн аныктоосу жана касиеттери, б.а. кыймылдын аксиомалары жок. Кесиндилердин узундуктарын, фигуралардын жана

телолордун объекттеринин аянттарын өлчөө теориясында чоң мааниге ээ болуучу Архимеддин аксиомасы (үзгүлтүксүздүк аксиомаларынын бири) да жок. Буга Евклиддин замандашы Архимед көңүл бурган.

3) IV постулаты ашыкча экени көрүнүп турат, анткени аны теорема сыяктуу далилдөөгө болот.

Өзгөчө бешинчи постулатты билгилеп кетели. "Башталыштын" I китебинде биринчи 28 сүйлөм бешинчи постулатка кайрылбай эле далилденген. Аксиомалардын жана постулаттардын тизмесин азайтуу, V постулатты теорема катары далилдөөгө Евклиддин мезгилинен эле келе жаткан. Прокл (б.з. V к.), Омар Хайам (1048-1123), Валлис (XVII к.), Саккери жана Ламберт (XVIII к.) жана Лежандр (1752-1833) V постулатты теорема катары далилдөөгө аракет кылышкан. Алардын далилдөөлөрү ката болуп, бирок эки жаңы геометриянын (Риман жана Лобачевский) туулушуна алып келген.

Евклиддик эмес геометриялык системалар. Жаңы геометриянын бет ачаары - Н.И. Л о б а ч е в с к и й (1792-1856) да V постулатты далилдөө аракетинен баштаган.

Николай Иванович өзүнүн системасын "Башталыш" деңгээлине чейин жеткирип карама-каршылыкка келем деген, бирок андай болбоду. 1826 – жылы туура корутундуга келген: Евклиддик геометриядан башка да геометрия жашайт.

Биринчи караганда бул корутунду далилсиз болуп көрүнөт: мындан ары да улантса, балким карама-каршылыкка келиши мүмкүн. Бирок бул суроо Евклиддик геометрияга да тиешелүү болгон. Башкача айтканда, эки геометрия да тең логикалык карама-каршылык эместиктин суроосунун астында бирдей. Андан кийинки изилдөөлөрдө бир геометриянын карама-каршылык эместигинен экинчи геометриянын карама-каршылык эместиги келип чыгат, б.а. логикалык системалардын тең күчтүүлүгү келип чыгат.

Лобачевский башка да геометрия бар деп биринчи жолу айткан, бирок жалгыз болгон эмес. Гаусс (1777-1855) бул идеяны 1816 – жылы эле айткан, бирок расмий түрдө жарыялабаган.

Лобачевскийдин (1829) жыйынтыктары жарыялагандан кийин, 1832–жылы венгриялык окумуштуу Я. Бойяи (1802-1860) өзүнүн эмгектерин жарыялайт. Ал 1823–жылы башка геометриянын жашашы жөнүндөгү жыйынтыкка келет, бирок жарыкка Лобачевскийден кийин чыгарат. Я. Бойяинин иши Лобачевскийдин эмгектерине караганда анча өркүндөтүлбөгөн жана кыска болгон, ошондуктан бул теория Лобачевскийдин атына жазылган.

Лобачевскийдин теориясынын жалпы таанылышына андан кийинки геометрлердин иштери түрткү болгон. 1868–жылы италиялык математик Э. Бельтрами (1825-1900) ийрилиги турактуу жана терс беттин үстүндө (псевдосфера) Лобачевскийдин геометриясы орун аларын далилдеген. Гильберт (1862-1943) бул далилдөөнүн кемчилик жерин көрсөткөн. Ал Евклиддик мейкиндикте өзгөчөлүгү жок, ийрилиги турактуу жана терс болгон бет жашабашын айткан. Мына ошондуктан ийрилиги турактуу жана терс болгон беттин үстүндө Лобачевскийдин геометриясынын жалпак гана бөлүгүн интерпретация кылсак болот.

Бул кемчилик Пуанкаре (1854-1912) жана Клейндин (1849-1925) интерпретацияларында четтетилген.

Лобачевскийдин геометриясынын карама-каршы эместигинин далилдөөсү бешинчи постулаттын башка постулаттардан көз каранды эместиги менен кошо далилденген. Чындыгында, эгерде көз каранды болгондо, анда Лобачевскийдин геометриясы карама-каршылыктуу болуп, бири-бирин четке кагат эле.

Евклиддик геометриянын андан ары изилденишинде аксиомалар системасынын жана постулаттардын толук эмес экендиги көрсөтүлгөн. Аксиоматиканын изилдениши Гильберт тарабынан 1899-жылы аякталган

Гильберттин аксиоматикасы беш группадан турган:

- Байланыш аксиомалар (таандык);
- Тартип аксиомалары;
- Конгруэнттүүлүк аксиомалары (барабардык, дал келүүчүлүк);
- Үзгүлтүксүздүк аксиомалары;
- Параллелдүүлүк аксиомалары.

Бул аксиомалар (баары 20) үч түрдөгү объекттерге таандык: чекиттер, түз сызыктар, тегиздиктер жана алардын ортосундагы үч катышка: таандык, ортосунда жатат, конгруэнттүү. Чекиттердин, түз сызыктардын, тегиздиктердин жана алардын ортосундагы катыштардын конкреттүү мааниси көрсөтүлгөн эмес. Алар кыйыр мааниде аксиомалар аркылуу аныкталган. Ушунун эсебинен Гильберттин аксиомаларынын негизинде тургузулган геометрия ар түрдүү конкреттүү реализацияларды берет.

Жогоруда айтылган аксиомалар менен түзүлгөн геометриялык система Евклиддик геометрия деп аталат, себеби ал Евклиддин "Башталышы" эмгегиндеги геометрия менен дал келет.

Евклиддик системадан айырмалаган геометриялык системалар Евклиддик эмес геометрия деп аталат. Салыштырмалуулуктун жалпы теориясына ылайык мейкиндикте ал да бул система абсолюттук так боло албайт, бирок кичинекей масштабда мейкиндикти сүроттөөгө жарактуу.

Практикада евклиддик формулалар колдонулганын себеби алардын жөнөкөйлүгүндө.

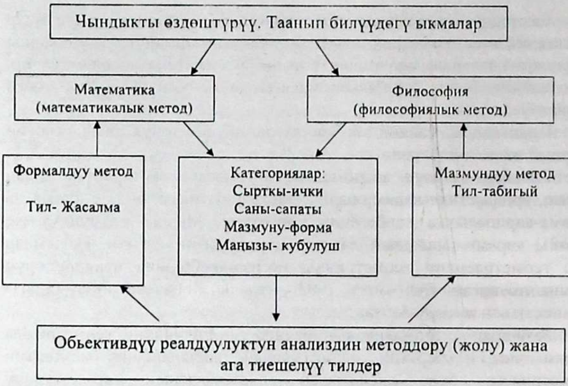
Гильберт өзүнүн аксиомалар системасын ар тараптуу карап чыгып, арифметика карама-каршылыкка учурабаса, анда система да карама-каршылыкка келбегенин көрсөткөн. Мында мазмундуу же сырткы карама-каршылык эместик көрсөтүлгөн. Ал көп кылымдар бою геометрлердин геометрияны негиздөө боюнча изилдөөлөрүн аягына чыгарган. Бул эмгек 1903 – жылы Лобачевский атындагы премия менен жогору бааланган.

Заманбап аксиоматикалык баяндоодо Евклиддин геометриясы дайым эле Гильберттин аксиомаларын пайдаланбайт: мектептин геометриясы бул аксиомалар системасынын ар түрдүү модификацияларында түзүлгөн.

XX кылымда Лобачевскийдин геометриясы абстракттуу математика үчүн эң чоң мааниге ээ экендиги байкалып, анын колдонулушу менен түздөн түз байланышта экени билинет. А. Эйнштейдин эмгектериндеги мейкиндик менен убакыттын өз ара байланышы Лобачевскийдин геометриясына тикеден-тике тиешеси бар экени билинет.

1.4. Азыркы дүйнөдө, дүйнөлүк маданиятта жана тарыхта, анын ичинде гуманитардык илимдердеги математиканын орду жана ролу

Математиканын адамзаттын маданиятындагы ролу аябай чоң. Философиянын тарыхына кайрылуу менен ошол кездеги математиканын негиздөөчүлөрү математикалык илимди, философиянын бир бөлүгү, дүйнөнү таануу үчүн каражат катары карашкан.



Математика жалпы адамзаттын маданиятынын бир бөлүгү болуп эсептелет. Адамзаттын өнүгүүсүнүн бир канча миң жылдыктар бою математикалык фактардын топтолушу эки жарым миң жыл мурун математиканын өзүнчө илим катары пайда болушуна алып келген. Байыркы Грецияда окутулуучу квадривий предмети арифметиканы, геометрияны, астрономияны жана музыканы камтыган. Адамзат үчүн математиканын маанисинин чоң экендигин Евклиддин “Башталышы” китебинин эң көп жолу басылып чыгышы айтып турат.

Математика илимий көз караштын иштелип чыгышына жана зарыл болгон жалпы маданий деңгээлге жетүүнүн эң бай мүмкүнчүлүктөрүнө ээ.

Курчап турган дүйнөнү түшүндүрүү аракетинде “Эмнеге?” деген суроону берип отуруп, байыркы философ-софистер математикалык билимдердин бөлүп чыгаруу зарылчылыгына келген.

Улуу математикалык идеялардын жаралыш тарыхы, көрүнүктүү математиктердин тагдыры (Архимед, Галуа, Паскаль, Галилей, Гаусс, Эйлер, Ковалевская, Чебышев ж.б) акыл жана жүрөк үчүн азык берет, илимге чын дилден кызмат кылуу философиялык ой жүгүртүүлөргө жана (нравалык) адептүүлүк изилденүүлөргө алып келет.

Логикалык ойлоо математиканын методун көрсөтөт, ошондуктан аны үйрөнүү логикалык ой жүгүртүүнү тарбиялайт, ар бир адам билүүсү зарыл болгон себеп-натыйжа байланыштарын туура орнотууга мүмкүндүк берет. Математиканы түшүндүрүү стили, анын тили сүйлөө речине таасирин тийгизет. ***Ар бир маданияттуу адам*** *математиканын негизги түшүнүктөрү: сан, функция, математикалык модель, алгоритм, ыктымалдуулук, оптимизация, дискреттик жана үзгүлтүксүз чоңдуктар, чексиз кичине жана чексиз чоң чоңдуктар түшүнүктөрү жөнүндө маалыматы болушу керек.* Кеп, конкреттүү формулалар жана теоремалар жөнүндө эмес, негизги түшүнүктөр жана идеялар тууралуу.

Математиканы мектеп курсунан гана билген адам XX кылымга чейин топтолгон канча билимдердин кандайдыр бир бөлүгүн гана мектеп курсунда берилерин сезбесе да керек. Азыркы күндө ай сайын миңдеген жаңы теоремалар далилдөөлөрү менен жарыкка чыгарылып жатат. Математиканын колдонулушу жөнүндө сөз кылбасак да кандай гана тармактарда колдонулуп келе жатат. Математиканын чегинин кеңейиши, активдүүлүктүн күчөшү жана математиктердин илимдин предмети жөнүндө оюнун өзгөрүүсүнүн ортосундагы тыгыз байланышты белгилеп кетүү керек.

Азыркы мезгилде “Математикалык лингвистика”, “Математикалык биология”, “Математикалык экономика” ж.б. сөз тизмектери менен эч кимди таң калтыра албайбыз. Математика бүгүнкү күндө кеңейиши менен тереңдетилиши да кошо жүрүп жатат. Математика коомдун жашоосунда көрүнүктүү орунду ээлеп келе жатат.

Математиканын бардык жерде колдонулушу кээ бир адамдарга табышмактуу жана шектүү болуп көрүнөт. Чындыгында эле, физика жана химия да чоң мааниге ээ. Физика биз үчүн жаңы энергия булактарын, тез байланыштын каражаттарын берет. Химия болсо жасалма кездемелерди жаратат, жасалма тамактарды жаратуунун алдында турат. Бул илимдер адамдын энергия, байланыш, тамак жана кийим жактан муктаждыктарын табууга жардам берет жана биздин жашоого тыгыз байланышта кирип калган.

Физикага окшоп которулуунун жаңы жолдорун, химияга окшоп жаңы буюмдарды ачылыш жасабаган математика адамзат үчүн эмне берет?

Эмнеге кандайдыр бир илимдин жана техника тармагында математикалык методдордун пайда болушу белгилүү жетишкендикти жана өнүгүүнүн жаңы этабы башталганын билдирет?

Бул суроого көпчүлүк учурда тартылган жооп катары, математика жакшы эсептешти билет, ошол себептен цифралык берилгендердин математикалык иштеп чыгышын изилденип жаткан процессте камсыз кылат деген жооп болгон. Бирок азыркы замандагы математизация себептерин түшүндүрүүдөгү аракетте математиканын эсептөө мүмкүнчүлүктөрү эң башкы маанини ойнобой калат.

Бул процесстин негизги себеби төмөнкүдөй: башка илимдер сунуш кылган анча абстракттуу эмес жана чаржайыт моделдерге караганда математика жалпы жана курчап турган чындыкты үйрөнүү үчүн жетишээрлик деңгээлде так логикалык моделдерди сунуш кылат. Мындай моделдерди математика өзүнүн өзгөчө тили – сандар тили, ар түрдүү символдор менен берет. Математиканын изилдөө объектилери катары жаратылыштагы, техникадагы, коомдогу кубулуштарды сүрөттөө үчүн тургузулган логикалык моделдер кызмат кылат. Изилденүүчү объекттин (кубулуш, процесс ж.б.) математикалык модели деп, бул объекттин геометриялык формасын жана анын сандык параметрлери ортосундагы сандык катыштарды чагылдырган логикалык конструкция аталат. Математикалык модель каралып жаткан объекттин тигил же бул жактарын чагылдырып жана калыбына келтирип жатып математикалык теориянын принциптерине таянып объект жөнүндө жаңы информация бериши мүмкүн.

Эгерде математикалык модель каралып жаткан кубулуштун маңызын туура чагылдырса, анда ал мурда табылбаган закон ченемдүүлүктөрдү, теориялык жана практикалык маселелерди чыгарууга мүмкүнчүлүк түзгөн шарттардын математикалык анализин берет.

Албетте, математика гуманитарийлерге (анын ичинде юристке) кереги барбы? – деген суроо пайда болот.

Эң керектүү укук, медицина, табият таануу жана башкалар сыяктуу эле математика да адамзат маданиятынын бир бөлүгү катары эсептелет. Адамзатынын бардык эң мыкты ойлорунун жана колдорунун (человеческих рук) жетишүүлөрү ар бир адамга зарыл болгон гуманитардык билим берүүнүн негизин түзөт. Мына ушундан, математик-студентке укук кандай дисциплина болсо, студент-гуманитарий үчүн да математика жалпы билим берүүчү дисциплина болуп эсептелет.

Бирок юрист үчүн математика ушуну менен эле чектелип калбайт.

М.В. Ломоносовдун сөзүн эскерте кетели: "**Математиканы акылды калыбына келтиргендиги үчүн үйрөнүү керек**". Эң алдын өзүнүн ички тартиби, өзүнүн логикасы үчүн чектелбейт. Математикадагы ички тартиби өзгөчө жол менен логикалык катыштын жүрүүсү менен түзүлөт.

Математика акылды тартиптештирүү үчүн өзүнүн конструкцияларынын жалпылык жана абстракттуулук касиеттери менен таасирин тийгизет. Математика ар түрдүү эрежелерге жана бир типтүү маселелерди чыгаруудагы аныкталган методдорго бай. Мындай маселелерди чыгарууда адам так алгоритмди сактоосу, кайсы амалды кандай тартипте аткаруу керек экендигин билиши керек.

Математика ар кандай типтеги (түрдөгү) эрежелерди, тапшырмаларды, инструкцияларды жасап жана аларды так аткарууну үйрөтөт (юристке керек болгон сапаттар). Юриспруденцияда математикадай эле бир ой жүгүртүүнүн бир эле методдорун колдонушат, максаты – чындыкты табуу.

Каалаган укук таануучу математик сыяктуу эле логикалык ой жүгүртүүнү жана практикада индуктивдүү жана дедуктивдүү методдорду колдонушту билиши керек. Мына ошондуктан, математиканы үйрөнүү менен болочок укук таануучу өзүнүн профессионалдык ой жүгүртүүсүн калыптандырат.

Андан сырткары, математикалык методдорду колдонуу ар бир адистин мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтет. Маанилүү ролду статистика, информацияны туура иштетүү, туура жыйынтык чыгаруу жана божомол кылуу ойнойт. Булардын баарын билген адистин баалуулугу жогорулайт.

Статистикалык маалыматтарга караганда өздөрүнүн карьерасын ийгиликтүү жасагандар (банкирлер, жеке ишкерлер) ЖОЖдо алган терең математикалык билимдерин колдоно билүүсүндө турат. Белгилүү биолог Чарльз Дарвин: "Математиканын улуу принциптерин үйрөнүп алган адамдарда башкаларга караганда бир сезүү органына көп" - деген.

Биз математика кылымында жашап жатабыз. XX кылымдын башынан баштап математика адамзаттын бардык областтарына активдүү өтө баштады. К. Маркс айткандай: "Илим математиканы колдоно алса, ошондо гана илим жогорку деңгээлге жетет". Азыркы учурда кээ бир илимдер математиканы курал катары колдоно башташса, ал эми кээ бирлери, мисалы, гуманитарийлер эми гана колдоно башташты. Алардын арасында дагы эле математикалык методдордун колдонуу перспективасына күмөн санагандар аз эмес. Бирок алардын көпчүлүк бөлүгү математиканы "колдонуу керекпи" деген суроо эмес, кайсы жерде кантип колдонуу керек деген суроонун үстүндө ойлонуп жатышат.

Математикалык билимдерди колдонуудагы гуманитарийлердин тажрыйбасы ашып жаткандыгы тууралуу адабияттар пайда боло баштады, мисалы, математикалык методдордун тарыхый изилдөөдө биринчи колдонулушу боюнча: "Миронов Б.Н., Степанов З.В. Историк и математика. Л.:Наука, 1975" адабияты болгон. Андан кийин юристтер үчүн математикалык билимдерди юридикалык практикада, криминалистикада колдонулушу көрсөтүлгөн: "Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М. Математика: Учебный курс для юристов. М.: Юрайт, 1999."

Конкреттүү математикалык билимдерге ээ болуунун негизинде курчап турган дүйнөнү математиканын каражаттарынын жардамында таанып билүү жана сезүү адамдын индивидуалдык ишмердүүлүгүнүн шарттарын түзүү - бул ЖОЖдогу математикалык билим берүүнүн маанилүү компонентасы сыяктуу эле кала берет.

2-ГЛАВА. КӨПТҮКТӨР ТЕОРИЯСЫ ЖАНА ДИСКРЕТТИК МАТЕМАТИКАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

Математикадагы методдордун бири болуп абстракцияны колдонуу методу болуп эсептелет, б.а. бул методду колдонууда конкреттүү маалыматтар эске алынбайт. Бул көптүк түшүнүгүнүн пайда болушуна алып келет. Көптүк түшүнүгү математикадагы негизги түшүнүктөрдүн бири болуп эсептелет.

Көптүктөр теориясы өзүнө көптөгөн ар түрдүү түшүнүктөрдү жана алардын бири-бири менен болгон байланыштарын камтыйт. Көптүктөр турмушта кеңири колдонулат Ошондуктан аларды түшүнүү жана колдоно билүү зарыл.

Көптүктөр теориясын өздөштүрүүдө **квантор** деп аталган түшүнүк кеңири колдонулат. Квантор (латын тилинин quantum — "канча" деген сөзүнөн алынган) деп кандайдыр бир обьекттин элементтерине тиешелүү болгон жалпы мүнөздөмөнү айтабыз.

Кадимки сүйлөмдө мындай мүнөздөмөлөр үчүн "бардык", "каалагандай", "ар бир", "жашайт", "кээ бир" деген сөздөр колдонулат.

Практикада негизинен эки квантор: **жалпылык квантору** жана **жашоо квантору** колдонулат.

Жалпылык кванторун белгилөө үчүн "$\forall$" символу алынат жана ал "бардык", "каалагандай", "ар бир" деген сөздөрдүн синоними катары колдонулат.

Жашоо кванторун белгилөө үчүн "$\exists$" символу алынат жана ал "жашайт", "кээ бир" деген создөрдүн синоними катары колдонулат.

Мындан тышкары сүйлөмдөрдү символдордун жардамы менен жазууда "жана", "же", "келип чыгат", "тең күчтүү" деген сөздөрдүн ордуна төмөндө көрсөтүлгөн символдорду колдонобуз:

"$\wedge$" - "жана";
"$\vee$" – "же";
"$\Rightarrow$" – "келип чыгат";
"$\Leftrightarrow$" – "тең күчтүү".

2.1. Көптүктөр. Негизги түшүнүктөр

Көптүк түшүнүгү - математиканын алгачкы түшүнүктөрүнүн бири болуп эсептелет, б.а. ал башка түшүнүктөр аркылуу аныкталбайт, бирок түшүндүрүү жолу менен баяндалат. Көптүктөр теориясынын түзүүчүсү немец окумуштуусу Г. Кантор (1845-1918) болгон.

Көптүк деп кандайдыр бир объекттердин жыйындысын түшүнөбүз. Мисалы, бүтүн сандардын жыйындысы, латын алфавитинин тамгалары, университеттеги студенттер, асмандагы жылдыздар, дарыялар, көлдөр, тоолор, автоунаалар ж.б. объекттер көптүк түшүнүгүнө мисал боло алат. Мындан, көптүктү түзгөн обьекттердин жаратылышынын ар түрдүүлүгүн жана көптүктөр теориясынын колдонулушунун кеңири экендигин байкайбыз.

Көптүктү түзгөн объекттер **көптүктүн элементтери** деп аталат. Демек, ар бир көптүк элементтерден турат. Элементтеринин саны чектүү болгон **көптүктү чектүү** көптүк деп, ал эми элементтеринин саны чексиз болгон көптүктү **чексиз** көптүк деп айтабыз.

Көптүктөр латын алфавитинин чоң $A, B, C, ..., X, Y, Z$ тамгалары менен, ал эми элементтери латын алфавитинин кичине $a, b, c, ..., x, y, z$ тамгалары менен белгиленет. Көптүктүн элементтери фигуралык кашаалардын ичине жазылып, бири-биринен үтүр аркылуу ажыратылат:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \ N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\},$$

$$B = \{\text{Àñàí}, \text{Усөн}, \text{Áàòìà}, \text{Çóóðą}\},$$

$$\tilde{N} = \{Sun, Mon, Tu, Wen, Thu, Fri, Set\}.$$

Көптүктөрдү жана алардын элементтерин башка алфавиттердин тамгалары менен да белгилөөгө болот.

Көптүктөрдү эки түрдүү жол менен берүүгө болот: 1) элементтерин саноо жолу; 2) элементтеринин касиетин баяндоо жолу менен.

Жогорудагы мисалда A, N, B, C көптүктөрү көптүктүн элементтерин саноо жолу, б.а. 1-жол менен берилди.

Көптүктүн элементтеринин касиеттерин баяндоо жолу менен, б.а. 2-жол менен берүү төмөнкүдөй болот. Эгерде A көптүгүнүн бардык элементтери α касиетин канааттандырса, анда A көптүгүн төмөнкүдөй жазабыз: $A = \{x : \alpha(x)\}$.

Мисалы, $A = \{x : x \in N \wedge x < 6\}$ көптүгү элементтеринин касиетин баяндоо жолу менен берилди. Чындыгында бул көптүк $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ көптүгү менен дал келет.

Мындан тышкары көптүктү баяндоодо анын элементтеринин иреттүүлүгү эске алынбайт.

Жогоруда мисалда элементтеринин саны чектүү болгондуктан A, B, C көптүктөрү чектүү көптүктөр, ал эми элементтеринин саны чексиз болгондуктан N көптүгү чексиз көптүк болуп эсептелет.

Бир да элементи жок болгон көптүктү **бош (куру)** көптүк деп айтабыз жана аны $\varnothing$ символу менен белгилейбиз. Мисалы, $A=\{$Жер шарынын айланасында айланып жүргөн планеталар$\}$, $B=\{$Биринчи класстын окуучуларынын арасында боюнун узундугу 2 метр болгон окуучулар$\}$ – көптүктөрү бош көптүктөргө мисал боло алат.

x элементи X көптүгүнө таандык (же тиешелүү) дегенди $x\in X$ аркылуу белгилейбиз. Эгерде x элементи X көптүгүнө таандык эмес дегенди $x\notin X$ (же $x\overline{\in} X$) деп жазабыз.

Эгерде A көптүгүнүн бардык элементтери B көптүгүнүн да элементтери болсо, анда A көптүгү B көптүгүнүн **бөлүкчө көптүгү** (көптүкчө) деп аталат жана төмөндөгүдөй жазылат: $A\subset B$. $"\subset"$ символу көптүктөрдүн камтылуусун түшүндүрөт. Бош көптүк каалаган көптүктүн бөлүкчө көптүгү болот.

Мисалы, $A=\{1,2,3\}$ жана $B=\{5,2,4,3,8,1\}$ көптүктөрү берилсе, анда $A\subset B$ болот, себеби A көптүгүнүн элементтери B көптүгүндө табылат.

Кээде көптүктүн элементтери да көптүктөр болушу мүмкүн. Мисалы, A көптүгү университеттин 4 – курсунун студенттик тайпаларынын көптүгү болсун. Бул учурда студенттик тайпалардын ар бири өз учурунда көптүктөрдү түзүшөт. Мындан, көптүктүн бир нече бөлүкчө көптүктөрүнүн жашай тургандыгын байкайбыз.

Эгерде A көптүгүнүн ар бир элементи бир эле учурда B көптүгүнүн элементи болсо жана тескерисинче B көптүгүнүн ар бир элементи A көптүгүнүн элементи болсо, анда A жана B көптүктөрү **барабар** деп аталат жана төмөнкүдөй жазылат: $A=B$.

Мисалы, $A=\{b,c,d,a\}$ жана $B=\{a,d,b,c\}$ көптүктөрү бирдей элементтерден тургандыктан алар барабар болот.

Универсалдык (негизги) көптүк деп каралып жаткан көптүктөрдү камтып турган көптүктү айтабыз жана аны U тамгасы менен белгилейбиз.

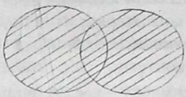
Мисалы, R чыныгы сандардын көптүгү Q рационалдык жана J иррационалдык сандардын көптүктөрү үчүн универсалдык көптүк болот, б.а. $U=R$.

2.2. Көптүктөрдүн үстүнөн аткарылуучу амалдар

Көптүктөрдүн үстүнөн биригүү (сумма), кесилишүү (көбөйтүү) жана айырма (кемитүү) амалдары аткарылат. Көптүктөрдүн үстүнөн аткарылуучу амалдар жана алардын касиеттери көбүнчө Эйлер - Венндин диаграммалары аркылуу түшүндүрүлөт. Эйлер - Венндин диаграммалары деп көптүктөрдүн жалпак фигуралар аркылуу сүрөттөлүшүн айтабыз.

A жана B көптүктөрүнүн ***биригүүсү (суммасы)*** *деп элементтери же A, же B көптүкторүнө таандык болгон C көптүгүн айтабыз жана төмөнкүдөй белгилейбиз: $C = A \cup B$, б.а. $C = \{ x : x \in A \vee x \in B \}$.*

Мисалы, $A = \{4, 5, 6, 8\}$ жана $B = \{1, 4, 3, 8\}$ болсо, анда $C = A \cup B = \{ 1,3,4,5,6,8 \}$ болот.



$A \cup B$

1-чийме

Көптүктөрдүн биригүүсүн Эйлер-Венндин тегеректери менен төмөнкүдөй сүрөттөөгө болот: эгерде A жана B көптүктөрүн тегеректер менен мүнөздөсөк, анда алардын биригүүсү 1-чиймеде көрсөтүлгөн штрихтелген фигураны аныктайт.

Көптүктөрдүн биригүүсү төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

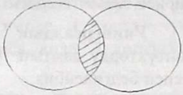
1°. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативдик);

2°. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативдик);

3°. $A \cup A = A$.

A жана B көптүктөрүнүн **кесилишүүсү (көбөйтүндүсү)** *деп элементтери A көптүгүнө да, B көптүгүнө да таандык болгон C көптүгүн айтабыз жана төмөнкүдөй белгилейбиз: $C = A \cap B$, б.а. $C = \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$.*

Мисалы, $A = \{4, 5, 6, 8\}$ жана $B = \{1, 4, 3, 8\}$ көптүктөрү берилсе, анда $C = A \cap B = \{ 4, 8 \}$ болот.



$A \cap B$

2-чийме

Эгерде көптүктөрдүн жалпы элементтери жок болсо, анда ал көптүктөрдүн кесилишүүсү бош көптүк болот, б.а. $C = A \cap B = \varnothing$. Көптүктөрдүн кесилишүүсү Эйлер-Венндин тегеректери аркылуу 2-чиймеде көрсөтүлгөн.

Көптүктөрдүн кесилишүүсү төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1°. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативдик);

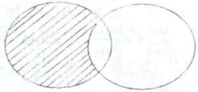
2°. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативдик);

3°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибьютивдик);

4°. $A \cap A = A$.

A жана B көптүкторүнүн ***айырмасы*** *деп, B көптүгүнүн элементтери кирбеген A көптүгүнүн элементтеринен турган C*

көптүгүн айтабыз жана $C = A \mid B$ *аркылуу белгилейбиз.* $C = A \mid B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.



$A \setminus B$

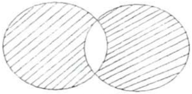
3-чийме

Мисалы, $A = \{8, 9, 10\}$ жана $B = \{9, 10, 11\}$ берилсе, анда $C = A \setminus B = \{8\}$ болот.

A жана B көптүктөрүнүн айырмасынын геометриялык интерпретациясы (түшүндүрүлүшү), б.а. Эйлер-Венндин тегеректери аркылуу 3-чиймеде чагылдырылган.

A жана B көптүктөрүнүн ***симметриялык айырмасы*** *деп, же A көптүгүнө же B көптүгүнө таандык болгон бардык элементтердин көптүгүн айтабыз (экөөнө бир убакытта эмес), б.а.* $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *аркылуу белгилейбиз.*

Мисалы, $A = \{8, 9, 10\}$ жана $B = \{9, 10, 11\}$ берилсе, анда $A \Delta B = \{8, 11\}$ болот. Көптүктөрүнүн симметриялык айырмасы Эйлер-Венндин тегеректери аркылуу 4-чиймеде көрсөтүлгөн.



A Δ B

4-чийме

Мисал. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ жана $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ көптүктөрү берилсин. Бул көптүктөр барабар боло алабы? Бул көптүктөрдүн биригүүсүн, кесилишүүсүн, айырмасын, симметриялуу айырмасын тапкыла.

Чыгаруу. Бул көптүктөр ар түрдүү элементтерден тургандыктан алар барабар эмес, бирок элементтеринин ортосунда бир маанилүү тиешелештикти орнотууга болот, ошондуктан бул көптүктөр эквиваленттүү. Эки көптүктүн биригүүсү деп жок дегенде же A же B көптүгүндө жаткан бардык элементтерден турган көптүктү айтабыз, б.а. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Бул көптүктөрдүн кесилишүүсү деп эки көптүктө тең жаткан элементтерден турган көптүк аталат, б.а. $A \cap B = \{2, 4\}$. Айырмалары $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, $B \setminus A = \{6, 8, 10\}$ барабар. Анда симметриялуу айырма $A \Delta B = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$ барабар болот.

Көнүгүүлөр

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ жана $B = \{3, 6, 9, 12\}$ көптүктөрү берилген. $A \cup B - ?$, $A \cap B - ?$, $A \setminus B - ?$, $B \setminus A - ?$, $A \Delta B - ?$ тапкыла.

Жообу: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$, $A \cap B = \{3, 6\}$,
$A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{9, 12\}$, $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5, 9, 12\}$.

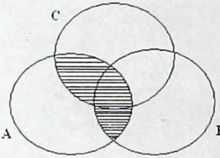
2. $A = (-7, 1]$ жана $B = [-3, 4]$ кесиндилери берилсе
$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B - ?$ тапкыла.

Жообу:
$A \cup B = (-7, 4]$, $A \cap B = [-3, 1]$, $A \setminus B = (-7, -3)$, $B \setminus A = (1, 4]$,
$A \Delta B = (-7, -3) \cup (1, 4]$

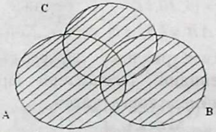
3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ көптүктөрү берилсе
$(A \cap B) \cup (C \cap D) - ?$ тапкыла.

Жообу: $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

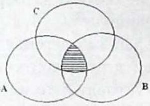
Эйлер - Венндин тегеректери аркылуу берилген мисалдар:



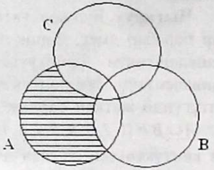
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$



$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$



$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

2.3. Дискреттик математиканын элементтери

Дискреттик математика – бул математиканын чектүү (финиттик) көптүктөрдүн касиеттерин изилдөөчү бир катар бөлүмдөрүнүн жалпы аты. Дискреттик математикага чектүү графтар, чектүү группалар, чектүү автомат, комбинаторика, коддоо ж.б. кирет. Дискреттик математика дискреттик анализ, чектүү математика деп да аталат.

Дискреттик математикада факториал деп аталуучу натуралдык аргументтүү функция кеңири колдонулат.

***Аныктама**. Терс эмес бүтүн маанилерде*

$$f(0)=1,\ f(n+1)=(n+1)f(n)$$

*формулалары менен аныкталган $f(n)$ функциясы n санынын **факториалы** деп аталат жана $n!$ деп белгиленет.*

Аныктамадан $\forall n$ үчүн $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ алабыз. $n=0$ болгондо $0!=1$ болот.

Мисалдар. $1!=1,\ 2!=1\cdot 2=2,\ 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

2.4. Комбинаторика

Комбинаторика – берилген обьекттерден тигил же бул шарттарга баш ийген канча түрдүү комбинацияларды түзүүгө болот деген маселелерди изилдеген дискреттик математиканын бөлүгү.

Практикада, көбүнчө берилген чектүү көптүктүн элементтеринен кандайдыр бир шартты канааттандырган элементтерди тандап алуу же аларды белгилүү тартипте жайгаштыруу талап кылынат.

Мисалдар.

1) 1, 2, 3, 4 цифраларынан канча түрдүү төрт орундуу цифралары кайталанбаган сандарды жазууга болот?

2) Театрдын кассасында турган 50 адам канча түрдүү жол менен кезекке турса болот?

3) Автомобилдин номери 4 цифра жана 2 тамгадан турса канча түрдүү номер чыгарууга болот?

4) 5 орундуу түрдүү цифралуу канча сан бар?

*Эгерде көптүктүн бөлүкчө көптүктөрүнүн элементтеринин жайгашуу тартиби мааниге ээ болсо, анда аларды **иреттелген көптүктөр** деп атайбыз.*

*Эгерде көптүктүн бөлүкчө көптүктөрүнүн элементтеринин жайгашуу тартиби мааниге ээ болбосо, анда аларды **иреттелбеген көптүктөр** деп атайбыз.*

Мисалы. a, b, c, d элементтеринен турган көптүктүн 3 элементтүү 4 бөлүкчө көптүктөрү бар

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd$$

жана 3 элементтүү 24 иреттелген бөлүкчө көптүктөрү бар

$$\begin{array}{l} abc,\ abd,\ acd,\ bcd, \\ acb,\ adb,\ adc,\ bdc, \\ bac,\ bad,\ cad,\ cbd, \\ bca,\ bda,\ cda,\ cdb, \\ cab,\ dab,\ dac,\ dbc, \\ cba,\ dba,\ dca,\ dcb. \end{array}$$

Орундаштыруу

*n элементтен турган көптүк берилсин. n элементтүү көптүктүн ар бир k элементтен түзүлгөн иреттелген бөлүкчө көптүгүн, n элементтен k элементтүү **орундаштыруу** деп айтабыз.*

Аныктоодон $n \geq k \geq 0$ жана n элементтен k элементтүү орундаштыруу – бул бири биринен элементтеринин курамы жана алардын жайгашуу тартиби менен айырмаланган бардык k элементтүү көптүктөрү экени көрүнүп турат.

n элементтен k элементтүү орундаштыруулардын саны

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

формуласы менен аныкталат.

Орундаштырууну белгилөө үчүн француз тилиндеги *Arrangement* (орундаштыруу, калыбына келтирүү) деген сөздүн биринчи тамгасы болгон A тамгасы кабыл алынган.

Жогоруда биз мисал келтиргендей 4 элементтен түзүлгөн 3 элементтүү орундаштыруу 24 барабар:

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 24.$$

1-мисал. Эсептегиле A_7^5, A_8^4, A_5^2.

Чыгаруу.

$$A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2} = 2520,$$

$$A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4!} = 1680, \quad A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 30.$$

2-мисал. Класстагы 20 орунга 4 окуучуну канча түрдүү жол менен жайгаштырууга болот?

Чыгаруу. $A_{20}^4 = \frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!} = 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20 = 116280$.

Демек, класстагы 20 орунга 4 окуучуну 116280 түрдүү жол менен жайгаштырууга болот.

3-мисал. Автомобилдин номери 4 цифра жана 2 тамгадан турса канча түрдүү номер чыгарууга болот?

Чыгаруу. Кыргызстанда “Z 18 99 Z”, “Z 10 95 B” ж.б. сыяктуу номерлерди мамлекет чыгарат. Демек, тамгалары кайталанышы мүмкүн экен жана англис тилинин 26 тамгасы пайдаланылат деп эсептейли. Анда тамгаларга карата 26х26=676 серия бар, ал эми ар бир серияда 9999 номер чыгат. Анда 676х9999= 6759324 номер чыгарууга болот.

Орун алмаштыруулар

*n элементтен түзүлгөн n элементтүү орундаштыруу n элементтүү **орун алмаштыруу** деп аталат.*

Орун алмаштыруулар орундаштыруунун айрым бир учуру болот.

n элементтен түзүлгөн көптүктүн бардык n элементтүү орун алмаштыруулары да n элементтен турат, ошондуктан алар бири биринен элементтеринин тартиби менен гана айырмаланат.

n элементтүү орун алмаштыруулардын саны

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Орун алмаштырууларды белгилөө үчүн француз тилиндеги *Permutation* (орун алмаштыруу) деген сөздүн биринчи тамгасы болгон P тамгасы кабыл алынган.

1-мисал. Эсептегиле P_5, P_7.

Чыгаруу. $P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040,$

$P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$

2-мисал. Класста дежур болуу үчүн бир жумага 6 окуучу бөлүнгөн. Канча түрдүү жол менен кезекти уюштурууга болот?

Чыгаруу. $P_6 = 6! = 720.$

Топтоштуруулар

*n элементтүү көптүк берилсин. n элементтүү көптүктүн ар бир k элементтүү бөлүкчө көптүктөрү n элементтен түзүлгөн k элементтүү **топтоштуруу** деп аталат.*

Бул учурда n элементтүү көптүктүн k элементтүү бөлүкчө көптүктөрү бири биринен элементтеринин курамы менен айырмаланат. Эгерде бөлүкчө көптүктөрүнүн арасында элементтеринин тартиби менен гана айырмаланган көптүктөр болсо, анда аларды окшош деп эсептейбиз.

n элементтүү көптүктүн бардык k элементтүү топтоштурууларынын саны

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Топтоштурууларды белгилөө үчүн француз тилиндеги *Combinasion* (топтоштуруу) деген сөздүн биринчи тамгасы болгон *C* тамгасы кабыл алынган.

1-мисал. Жогорудагы мисалда көрсөтүлгөндөй 4 элементтен турган $\{a, b, c, d\}$ көптүгүнүн 3 элементтүү 4 бөлүкчө көптүгү бар:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd$$

2-мисал. Эсептегиле C_4^2, C_7^5.

Чыгаруу. $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6,$

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21.$$

Оруңдаштыруулардын, орун алмаштыруулардын жана топтоштуруулардын санын эсептөө формулаларынын төмөнкүдөй касиеттери бар:

1°. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$; 3°. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$;

2^o. $C_n^k = C_n^{n-k}$; 4^o. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

4^o-касиеттин маанисин төмөнкүчө түшүндүрүүгө болот: C_n^k топтоштуруусу n элементтүү көптүктүн k элементтүү бөлүкчө көптүктөрүнүн санын аныктагандыктан, n элементтүү көптүктүн бардык бөлүкчө көптүктөрүнүн саны $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$ суммасына барабар болот. Демек, 4^o-касиет боюнча n элементтүү көптүктүн бардык бөлүкчө көптүктөрүнүн саны 2^n болот.

3-мисал. Жогоруда биз караган 1-мисалда 4 элементтүү $\{a, b, c, d\}$ көптүгүнүн 3 элементтүү 4 көптүкчөсүн тапканбыз. Бул көптүктүн жалпысынан төмөнкүдөй 16 бөлүкчө көптүктөрү бар:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a,b,c,d\}.$$

Чындыгында эле, көптүктүн бардык бөлүкчө көптүктөрүнүн санын эсептөө формуласынан пайдалансак, анда $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ болот. Эгерде 4^o-касиетти пайдалансак, б.а. көптүктүн элементтеринин саны $n = 4$ болгондуктан көптүктүн бардык бөлүкчө көптүктөрүнүн саны $2^4 = 16$ га барабар болот.

Орундаштыруулар, орун алмаштыруулар жана топтоштуруулар математиканын башка бөлүмдөрүндө кеңири колдонулат.

Мектеп курсунан бизге белгилүү болгон кыскача көбөйтүүнүн төмөнкү

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

формулаларын топтоштуруулардын жардамында төмөнкүдөй жазууга болот:

$$(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3,$$

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$$

Ал эми эки сандын суммасынын n-даражасы топтоштуруулардын жардамы менен төмөнкүдөй аныкталат:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + C_n^nb^n. \quad (1)$$

Бул формула ***Ньютондун биному*** деп аталат.

Эгерде $a = 1, b = 1$ деп алсак, анда (1) формуладан 4°-касиет келип чыгат.

Ньютондун формуласын кыскача төмөнкүдөй жазууга болот:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \qquad (2)$$

4-мисал. $x^2 - y$ эки мүчөсүн алтынчы даражага көтөргүлө.

Чыгаруу. (1) формула боюнча $a = x^2,\ b = y,\ n = 6$. Анда (2) формула боюнча

$$(x^2 - y)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k (x^2)^{6-k} (-y)^k =$$

$$= C_6^0 x^{12} - C_6^1 x^{10} y + C_6^2 x^8 y^2 - C_6^3 x^6 y^3 + C_6^4 x^4 y^4 - C_6^5 x^2 y^5 + C_6^6 y^6 =$$

$$= x^{12} - 6x^{10} y + 15x^8 y^2 - 20x^6 y^3 + 15x^4 y^4 - 6x^2 y^5 + y^6.$$

2.5. Графтар теориясынын элементтери

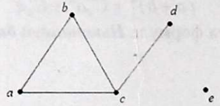
Графтардын пайда болушу

Көпчүлүк маселелер бири-бири менен маанилүү касиеттери менен байланышкан обьекттердин жыйындысын кароого келтирилет. Мисалы, автоунаалык картаны караганда биз ал жолдордун конфигурациясына жана сапатына, аралыгына ж.б. тактоолорго карабастан алардын башка пункттар менен байланышы бар экендиги менен кызыгабыз. Кызыгууну адамдардын мамилелеринин, окуялардын, абалдардын жана башка ар түрдүү обьекттердин ортосундагы байланыштар жана катыштар пайда кылышы мүмкүн.

Мындай учурларда каралуучу объеттерди чекиттер менен сүрөттөп, аларды ***чокулары*** деп атайбыз, ал эми алардын ортосундагы байланыштарды - сызыктар (каалагандай конфигурациядагы) менен сүрөттөп, ***кырлары*** деп атайбыз.

Граф деп чокулары жана кырлары менен аныкталган түгөйлөрдү айтабыз, б.а. эгерде чокуларынын көптүгү V, ал эми кырларынын көптүгү E менен белгиленсе, анда граф деп $G = (V, E)$ түрүндөгү түгөйлөрдү айтабыз.

Графтардын чокулары чекиттерден, ал эми кырлары тиешелүү чекиттерди туташтыруучу сызыктардан турган чийме катарында сүрөттөөгө болот.



Мисалы, төмөнкү чиймеде чокуларынын көптүгү $V = \{a, b, c, d, e\}$ жана кырларынын көптүгү $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ болгон жөнөкөй граф келтирилген.

Графтар боюнча биринчи эмгек 1736-жылы 20 жаштагы Леонард Эйлер тарабынан Россия илимдер академиясында иштеп жатканда жарыяланган. Мында кенигсбергтик көпүрөөлөр жөнүндө маселелердин чыгарылышы баяндалган: шаардын каалаган жеринен сейилдегени чыгып ар бир көпүрөөдөн бир гана жолу өтүп кайра чыккан жерине кайтуу болобу? Андан бери графтардын жардамында маселелерди чыгаруу кескин түрдө өстү. Графтардагы баш катырмалар жана оюндардын катарында өтө маанилүү практикалык проблемалар каралган, алардын көпчүлүгү математикалык методдорду талап кылган. XVIII кылымдын орто ченинде Кирхгоф графтарды электр чынжырларын анализдөө үчүн колдонгон.

Бирок графтар теориясы математикалык дисциплина катары XIX кылымдын 30-жылдары гана түзүлгөн. Графтар теориясы илимдин жана техниканын ар түрдүү областтарынын колдонмо маселелерин чыгаруунун күчтүү аппаратына ээ. Буга чынжырлардын жана системалардын анализи жана синтези, тармактык пландаштыруу жана башкаруу, операцияларды изилдөө, оптималдык маршруттарды тандоо, организмдердин турмуш тиричилигин моделдөө, кокустук процесстерди изилдөө ж.б. Графтар теориясы математикада көптүктөр теориясы, матрицалар теориясы, математикалык логика жана ыктымалдуулуктар теориясы бөлүмдөрү менен тыгыз байланышта. Бул бөлүмдөрдүн баарында графтарды ар түрдүү математикалык объекттерди көрсөтүү үчүн колдонулат. Ошол эле учурда графтар теориясы ага жакын болгон математикалык бөлүмдөрдүн аппаратын колдонот.

Ориентирленген графтар

Көпчүлүк учурда объекттердин ортосундагы байланыштар анык талган ориентация менен мүнөздөлөт. Мисалы, кээ бир көчөлөрдө автоунаалардын жолу бир жактуу кыймыл менен гана көрсөтүлөт, адамдардын ортосундагы мамилелер көз карандылык же улуулук менен аныкталат. Ориентирленген байланыштар системанын бир абалдан экинчи абалга өтүүсүн мүнөздөйт. Мисалы, спорттук мелдештеги командалардын ортосундагы жолугушуулардын жыйынтыктары, сандардын ортосундагы ар түрдүү катыштар (барабарсыздык, бөлүнүүчүлүк). Графтардын чокуларынын ортосундагы байланыштын багытын көрсөтүү үчүн тиешелүү кыры стрелка менен белгиленет. Ушул сыяктуу ориентирленген кырын ***жаа*** деп атайбыз, ал эми ориентирленген кырлары бар графты – ***ориентерленген граф*** деп атайбыз.

Салмактанган графтар

Объекттердин ортосундагы байланыштарды графтардын жардамында чагылдырууда кырларына жана жааларына кээ бир сандык маанилерди, белгилерди же мүнөздүк касиеттерди таңуулоого туура келет. Жогорудагы сандык маанилер, белгилер же мүнөздүк касиеттер **салмактар (жүктөр)** деп аталат. Эң жөнөкөй учурда булар каралып жаткан учурда кезекти көрсөтүүчү кырларынын жана жааларынын номерлери болушу мүмкүн. Кырынын же жаанын салмагы узундукту билдириши мүмкүн, топтолгон очколордун саны, адамдардын ортосундагы мамилелердин мүнөзү (баласы, атасы, агасы, мугалим, жетекчи) ж.б.у.с. Салмакты кырларынан жана жааларынан башка чокуларына да таңууласа болот. Мисалы, картадагы автоунаалык жолдордун тиешелүү пункттарындагы чокулары мейманканалардагы оруңдардын саны менен мүнөздөлүшү мүмкүн, же станциялардын техникалык тейлөөдөн өткөрүү мүмкүнчүлүгү болушу мүмкүн. Жалпысынан айтканда, чокусунун салмагы ага тиешелүү болгон объекттин каалаган мүнөздөмөсүн билдирет (чокусу аркылуу көрсөтүлүүчү предметтин түсү, адамдын жашы ж.б.)

Чектүү графтардын түрү

*Эгерде графтын чокулары чектүү болсо, анда ал **чектелген граф** деп аталат.* Ориентирленген кыр (жаа) үчүн ***баштапкы чокусу*** жана ***акыркы чокусу*** деп айырмаланып бөлүнөт. Баштапкы чокудан жаа чыгат, ал эми акыркы чокуга жаа кирет. Бир эле чек аралык чокуга ээ болгон кырды гүрмөк (петля) деп атайбыз. Бирдей чек аралык чокуларга ээ болгон кырлар параллель болушат жана аларды ***эселүү*** деп атайбыз. Жалпы учурда граф обочолонгон чокуларды да кармашы мүмкүн. Алар кырлардын учтары болбой жана башка чокулары менен да эч кандай байланышы жок болушу мүмкүн.

Маршруттар

Көпчүлүк учурларда графтардагы маселелер белгилүү касиеттерге жана мүнөзгө ээ болгон ар түрдүү маршруттарды бөлүүнү талап кылышат. m узундукка ээ болгон ***маршрут*** графтын эки жакынкы кырларынын чокулары дал келе тургандай удаалаш m кырлары аркылуу аныкталат. Бир чокудан башталып ушул эле чокуда бүткөн маршрутту ***туюк маршрут*** деп атайбыз. Бардык кырлары ар түрдүү болгон маршрутту ***чынжыр***, ал эми бардык чокулары ар түрдүү болгон маршрутту ***жөнөкөй чынжыр*** деп атайбыз. Туюк чынжыр ***цикл*** деп аталат, ал эми жөнөкөй чынжыр ***жөнөкөй цикл*** деп аталат. Кайталануучу жааларды кармабаган маршрут ***жол***, ал эми кайталануучу чокуларды кармабаган маршрут ***жөнөкөй жол*** деп аталат. Туюк жол ***контур***, ал эми жөнөкөй туюк жол ***жөнөкөй контур*** деп аталат. Жок дегенде бир цикл (контур) камтыган граф ***циклдик (контурдук)*** деп аталат.

Дарактар жана токой

Дарактар деп аталуучу байланышкан циклдик графтар өзгөчө кызыгууну пайда кылат. p чокуга ээ болгон дарак дайыма $q = p - 1$ кырын, б.а. граф байланышкан болушу үчүн минималдуу сандагы кырларды камтыйт. Чындыгында, эки чоку бир кыр менен байланышат. p чокуларды байланыштыруу үчүн $p - 1$ кырлары болушу зарыл жана жетиштүү. Даракка кырды кошкондо цикл пайда болот, ал эми дарактан жок дегенде бир кырды алып таштаганда ал ар бири даракты же обочолонгон чокуну түзгөн компоненттерге ажырайт. Компоненттери дарактар болгон байланышпаган граф ***токой*** деп аталат.

Дарак сыяктуу структураларга мисал катары генеалогиялык граф жана ошондой эле компьютердин катуу дискинде жайланышкан бардык файлдар боло алат. Ар бир логикалык диск башкы диск деп аталат. Ал китептин мазмуну сыяктуу мазмунга ээ. Башкы каталогдун мазмунунда дисктеги маалымат көрсөтүлөт: каталогдун файлдарынын жана ага камтылган каталогдордун аттары.

II БӨЛҮМ. ВЕКТОРДУК АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯ

3-ГЛАВА. ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

3.1. Скалярдык жана вектордук чоңдуктар

Чоңдуктар **скалярдык** же **вектордук** болуп бөлүнүшөт.

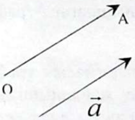
Эгерде чоңдуктар өздөрүнүн сандык мааниси менен толук аныкталса, анда мындай чоңдуктарды скалярдык (сандык) чоңдуктар деп атайбыз.

Мисалы, узундук, аянт, масса, көлөм, температура, тыгыздык, жумуш сыяктуу чоңдуктар скалярдык чоңдуктар болушат, анткени алар тандалып алынган сандык бирдиктер менен толук аныкталышат.

Эгерде чоңдуктар өздөрүнүн сандык мааниси жана багыты менен толук аныкталса, анда мындай чоңдуктарды вектордук чоңдуктар деп атайбыз.

Мисалы, ылдамдык, ылдамдануу, күч, которулуу өздөрүнүн сандык мааниси менен гана эмес, багыты менен да кошо аныкталат, ошондуктан бул чоңдуктар вектордук чоңдуктар болушат.

Геометриялык түрдө вектордук чоңдукту багытталган кесинди аркылуу сүрөттөсө болот. Багытталган кесинди стрелка түрүндө, башталышы O чекитинде, ал эми акыркы A чекитинде болгон кесинди катарында белгиленет. Демек, вектор - бул башталышы жана акыркы чекиттери менен аныкталган **багытталган кесинди**.



Векторлор төмөнкүдөй белгиленет: $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$.

Кээде векторлорду бир эле кичине тамга менен да белгилешет: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$.

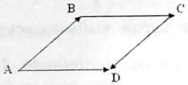
Вектордун узундугу деп багытталган кесиндинин узундугун айтабыз жана төмөнкүдөй белгилейбиз: $|\overrightarrow{AB}|$ *же* $|\vec{a}|$.

Вектордун узундугун вектордун модулу деп да атайбыз.

Узундугу нөлгө барабар вектор **нөлдүк вектор** деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет: $\vec{0}$. Нөлдүк вектордун башталышы менен акыры дал келет. Ошондуктан анын модулу (узундугу) нөлгө барабар болот: $|\vec{0}| = 0$. Мисалы. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$. Нөлдүк вектор багытка ээ эмес. Ар бир нөлдүк эмес вектор узундугу жана багыты менен аныкталат.

Узундугу бирге барабар болгон вектор ***бирдик*** *вектор деп атайбыз жана $\vec{e}$ аркылуу белгилейбиз.* Эгерде бирдик вектордун багыты $\vec{a}$ векторунун багыты менен дал келсе, анда аны $\vec{a}$ векторунун **ортасы** деп атайбыз.

Эгерде эки вектор бирдей узундукка ээ болуп, параллель же дал келүүчү түз сызыктарда жатышса жана бирдей багытталса, анда алар ***барабар векторлор*** *деп аталат.*



$ABCD$ ромбун алалы: $\vec{AB}$ жана $\vec{BC}$ векторлору барабар, анткени алар: 1) ромб болгон үчүн узундуктары барабар $|\vec{AD}|=|\vec{BC}|$; 2) бул векторлор параллель $\vec{AD}\parallel\vec{BC}$; 3) чиймеде көрүнүп тургандай $\vec{AD}$ жана $\vec{BC}$ векторлору бирдей багытталган, ошондуктан бул эки вектордун барабардыгын $\vec{AD}=\vec{BC}$ деп жазууга болот. Ал эми $\vec{AB}$ æàíà $\vec{BC}$, $\vec{BC}$ æàíà $\vec{CD}$, $\vec{CD}$ æàíà $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ æàíà $\vec{CD}$ векторлору барабар эмес: $\vec{AB}\neq\vec{BC}$, $\vec{BC}\neq\vec{CD}$, $\vec{CD}\neq\vec{AD}$, $\vec{AB}\neq\vec{CD}$, себеби эки вектордун барабардыгынын шарттарынын кээ бирин канааттандырбайт.

Параллель же дал келүүчү түз сызыктарда жатуучу жана багыттары бирдей же карама-каршы багытталган эки нөлдүк эмес векторлор ***коллинеардуу*** *векторлор деп аталат.*

Эки вектордун коллинеардуулугун $\vec{a}\parallel\vec{b}$ аркылуу белгилешет. Нөлдүк вектор каалаган векторго коллинеардуу деп эсептелет.

Чиймеде $\vec{AB}$ æàíà $\vec{CD}$, $\vec{BC}$ æàíà $\vec{AD}$ векторлору коллинеардуу: $\vec{BC}\parallel\vec{AD}$, $\vec{AB}\parallel\vec{CD}$. Ал эми $\vec{AB}$ æàíà $\vec{BC}$, $\vec{BC}$ æàíà $\vec{CD}$, $\vec{CD}$ æàíà $\vec{AD}$ векторлору коллинеардуу эмес (белгилениши $\nparallel$).

Узундуктары барабар, коллинеардуу, ал эми багыттары карама-каршы болгон нөлдүк эмес эки вектор ***карама-каршы*** *векторлор деп аталат.* Чиймеде $\vec{AB}$ æàíà $\vec{CD}$ векторлору карама-каршы векторлор болот жана аларды $\vec{AB}=-\vec{CD}$, $\vec{AB}=-\vec{BA}$ аркылуу белгилейт.

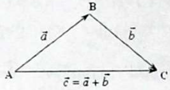
Мейкиндиктеги үч вектор ***компланардуу*** *векторлор деп аталат, эгерде алар бир эле тегиздикте же параллель болгон тегиздиктерде жатышса.*

Эгерде үч вектордун арасында жок дегенде бирөө нөлдүк же каалаган экөө коллинеардуу болушса, анда мындай векторлор компланардуу болот.

3.2. Векторлордун үстүнөн аткарылуучу амалдар

Векторлорду кошуу

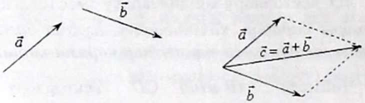
Мейли тело A чекитинен B чекитине карай кыймылдасын, андан кийин B чекитинен C чекитине карай жүрсүн. *Механикада* $\vec{AB}$ *вектору телонун* A *чекитинен* B *чекитине которулуусун аныктайт.* Ушул сыяктуу $\vec{BC}$ вектору - B дан C га карай которулууну, ал эми $\vec{AC}$ вектору – A чекитинен C чекитине которулууну аныктайт. $\vec{AC}$ векторун $\vec{AB}$ жана $\vec{BC}$ векторлорунун суммасы деп аташат жана $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$ аркылуу жазышат.



$\vec{a}$ векторунун учу (аягы) $\vec{b}$ векторунун башталышына коюлган учурда $\vec{a}$ нын башталышы менен $\vec{b}$ нын учун туташтырган жаңы векторду $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун **суммасы** деп атайбыз жана $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ аркылуу белгилейбиз.

Векторлорду ушундай жол менен кошуу эрежеси векторлорду кошуунун **үч бурчтук** эрежеси деп аталат.

Эки вектордун суммасын параллелограмм эрежеси боюнча да аныктоого болот:



Векторлордун суммасын табуу операциясы **векторлорду кошуу** деп аталат.

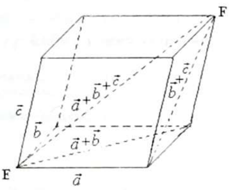
Векторлорду кошуу амалы төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ - коммутативдик (орун алмаштыруу) касиети.

Чындыгында эле, барабардыктын эки жагы каалагандай $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору үчүн, ушул эле эки векторго түзүлгөн жогорудагы параллелограммдын диагоналы болот.

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ - ассоциативдик (топтоштуруу) касиети.

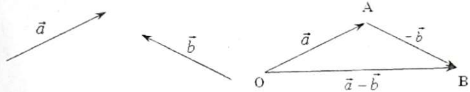
Чындыгында эле, каалагандай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үч векторун бир чекитке орнотуп, аларга параллелепипед тургузсак, анда топтоштуруу касиетинин эки жагы тең бир эле EF диагоналын туюнтат.



Векторлорду кемитүү

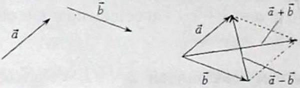
Каалаган $\vec{a}$ вектору үчүн ага тескери болгон вектор $-\vec{a}$ аркылуу белгиленет.

Каалаган $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору үчүн $\vec{a}+(-\vec{b})$ суммасы алардын ***айырмасы*** *деп аталат жана $\vec{a}-\vec{b}$ деп белгиленет.*



Векторлорду кемитүү эрежесин түшүндүрөлү. Каалаган $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору берилсин. $\vec{a}$ векторун O чекитинен өлчөйлү: $\vec{a}=\vec{OA}$, ал эми $\vec{b}$ векторуна карама-каршы вектор $-\vec{b}$ болот жана бул вектордун башталышы A чекитинен баштап өлчөнөт: $-\vec{b}=\vec{AB}$. Анда $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}=\vec{OB}$ болот.

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлоруна тургузулган параллелограммда бир диагоналы эки вектордун суммасы болсо, экинчи диагоналы эки вектордун айырмасы болот.



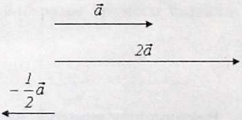
Векторду санга көбөйтүү

$\vec{a}$ *векторунун* λ ***санына болгон көбөйтүндүсү*** *деп* $\lambda\vec{a}$ *векторун айтабыз жана анын узундугу* $|\lambda||\vec{a}|$ *санына барабар болот. Эгерде* $\lambda>0$ *болсо, анда* $\lambda\vec{a}$ *вектору* $\vec{a}$ *вектору менен бирдей багытталат, эгерде* $\lambda<0$ *болсо, анда* $\lambda\vec{a}$ *вектору* $\vec{a}$ *векторуна карама-каршы багытталат.*

Мисалдар. 1). $\lambda=2$ санын $\vec{a}$ векторуна көбөйтөлү. Анда $2\vec{a}$ векторун алабыз жана анын узундугу $2|\vec{a}|$ га барабар болот.

$2\vec{a}$ векторунун багыты $\vec{a}$ векторунун багыты менен дал келет.

2). $\lambda=-\frac{1}{2}$ санын $\vec{a}$ векторуна көбөйтсөк, $-\frac{1}{2}\vec{a}$ векторун алабыз. Бул вектордун узундугу $\frac{1}{2}|\vec{a}|$ санына барабар, ал эми багыты $\vec{a}$ векторунун багытына карама-каршы болот.



Векторду санга көбөйтүү төмөндөгү ассоциативдик жана дистрибьютивдик касиеттерге ээ:

1°. $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$;

2°. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$;

3°. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

Теорема. *(коллинеардуулуктун зарыл жана жетиштүү шарты) $\bar{a}$ векторунун $\bar{b}$ векторлоруна коллинеардуу болушу үчүн $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ шарты аткарыла тургандай λ санынын жашашы зарыл жана жетиштүү.*

3.3. Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү

*Эки нөлдүк эмес векторлордун **скалярдык көбөйтүндүсү** деп, алардын узундуктарынын көбөйтүндүсүн бул векторлордун арасындагы бурчтун косинусуна көбөйткөндөгү санга барабар, б.а.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (1)$$

мында $\varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$ - эки вектордун арасындагы бурч.

Эгерде эки вектордун бирөөсү нөлдүк вектор болсо, анда скалярдык көбөйтүндү нөлгө барабар. $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$ түрүндө да белгилениши мүмкүн.

1-мисал. Эгерде $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 45^0$ болсо, анда эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн $\bar{a} \cdot \bar{b}$ тапкыла.

Чыгаруу. (1) формуланы пайдалансак

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot 2 \cdot \cos 45^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ алабыз.

Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн төмөнкүдөй касиеттери бар:

1°. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2°. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3°. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

4°. Вектордун скалярдык квадраты анын узундугунун квадратына барабар: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$. Эгерде $\vec{a} = \vec{b}$ болсо, анда

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2$ болот.

5°. Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ нөлдүк эмес векторлору өз ара перпендикуляр болсо, анда алардын скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар, б.а. эгерде $\vec{a}\perp\vec{b}$ болсо, анда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ болот.

Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү геометриялык маселелердеги бурчтарды жана проекцияларды эсептөөдө кеңири колдонулат.

Координаталары аркылуу берилген векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү

$\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}$ жана $\vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}$ векторлору $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ бирдик векторлору аркылуу берилсин. Координаталары аркылуу векторлорду $\vec{a}=\{x_a,\ y_a,\ z_a\}$, $\vec{b}=\{x_b,\ y_b,\ z_b\}$ түрүндө жазууга болот. Бул эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн көп мүчөлөрдү көбөйтүү сыяктуу көбөйтүп табабыз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k})=x_ax_b\vec{i}^{\,2}+y_ay_b\vec{j}^{\,2}+$$

$$+z_az_b\vec{k}^{\,2}+x_ay_b\vec{i}\,\vec{j}+x_az_b\vec{i}\,\vec{k}+y_ax_b\vec{j}\,\vec{i}+y_az_b\vec{j}\,\vec{k}+z_ax_b\vec{k}\,\vec{i}+z_ay_b\vec{k}\,\vec{j}.$$

Мында $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1,\quad \vec{i}\,\vec{j}=\vec{i}\,\vec{k}=\vec{j}\,\vec{i}=\vec{j}\,\vec{k}=\vec{k}\,\vec{i}=\vec{k}\,\vec{j}=0$ болгондуктан,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b \tag{2}$$

болот.

Демек, координаталары аркылуу берилген векторлордун **скалярдык көбөйтүндүсү** алардын тиешелүү координаталарынын көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар.

Эгерде векторлор тегиздикте берилсе, анда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b \tag{3}$$

болот.

Эгерде (2) формулада $\vec{b}=\vec{a}$ болсо, анда $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=x_a^2+y_a^2+z_a^2$ болот. Мындан $\vec{a}$ **векторунун узундугун** табабыз:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\,. \tag{4}$$

2-мисал. $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$ векторлору берилсе, анда $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу. Скалярдык көбөйтүүнүн касиеттери боюнча

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{i} + 4\vec{j})(-2\vec{i} + \vec{j}) = -2\vec{i}^{\,2} + 4\vec{j}^{\,2} = -2 + 4 = 2$ барабар.

3-мисал. $\vec{a} = \{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{b} = \{-3;\ 2;\ -1\}$ векторлору берилсе $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу. (2) формула боюнча

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot(-3) + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) = -3 + 4 - 3 = -2$ барабар.

4-мисал. 3-мисалдагы векторлордун узундуктарын тапкыла.

Чыгаруу . (4) формула боюнча

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$,

$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$ болот.

Координаталары аркылуу берилген векторлорду кошуу, кемитүү жана санга көбөйтүү

1. $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$ жана $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$ векторлору берилсин. Векторлорду кошуу жана кемитүү амалдары төмөнкүдөй аныкталат:

$$\vec{a}\pm\vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) \pm (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$

$$= (x_a \pm x_b)\vec{i} + (y_a \pm y_b)\vec{j} + (z_a \pm z_b)\vec{k},$$

б. а.

$$\vec{a}\pm\vec{b} = \{x_a \pm x_b;\ \ y_a \pm y_b;\ \ z_a \pm z_b\} \tag{5}$$

формуласына ээ болобуз.

Демек, **векторлордун суммасы (айырмасы)** векторлордун тиешелүү координаталарын кошуу (кемитүү) аркылуу табылат.

2. Векторду санга көбөйткөндө вектордун координаталарынын ар бирин ал санга көбөйтөбүз, б.а.

$$\lambda\vec{a} = \lambda x_a\vec{i} + \lambda y_a\vec{j} + \lambda z_a\vec{k} \text{ же } \lambda\vec{a} = \{\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a\}.$$

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун барабар болушу үчүн алардын тиешелүү координаталарынын барабар болушу зарыл жана жетиштүү, б.а.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = x_b, \\ y_a = y_b, \\ z_a = z_b. \end{cases}$$

5-мисал. $\vec{a} = \{3;\ -5;\ 8\}$, $\vec{b} = \{-1;\ 1;\ -4\}$ векторлорунун суммасынын модулун тапкыла.

Чыгаруу. Ал үчүн алдын ала бул векторлордун суммасын жана айырмасын табалы. (5) формуланын негизинде

$$\vec{a} + \vec{b} = \{3 + (-1);\ (-5) + 1;\ 8 + (-4)\} = \{2;\ -4;\ 4\},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{3 - (-1);\ (-5) - 1;\ 8 - (-4)\} = \{4;\ -6;\ 12\}.$$

Эми (4) формуласын пайдаланып

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6,$$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 36 + 144} = \sqrt{196} = 14$ алабыз.

Чекиттин координаталарын анын радиус-вектору аркылуу аныктоо

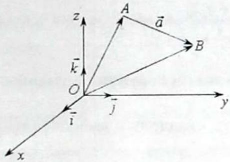
Мейкиндикте тик бурчтуу декарттык $Oxyz$ координаталар системасы берилсин. Каалаган $M(x, y, z)$ чекитине башталышы координата башталышында болгон, ал эми учу M чекитинде болгон $\vec{OM}$ векторун тиешелештикке коюуга болот.

$\vec{OM}$ векторун M чекитинин радиус-вектору деп атайбыз жана аны $\vec{OM} = \vec{r}$ аркылуу белгилейбиз.

$\vec{OM}$ векторунуң координаталары $\vec{OM} = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ болгондуктан $\vec{r} = \{x;\ y;\ z\}$ деп жазууга болот. Мындан M чекитинин координаталары $\vec{OM}$ векторунун координаталары менен дал келе тургандыгын байкайбыз. Демек, каалаган чекиттин координаталары анын радиус-векторунун координаталары менен дал келет.

Вектордун координаталары

Эгерде $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ чекиттеринин координаталары белгилүү болсо, $\vec{a} = \vec{AB}$ векторунун координаталарын тапкыла.



Бизге белгилүү $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$. Мындан $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$ алабыз. $\vec{OB}$ жана $\vec{OA}$ векторлору тиешелеш түрдө B жана A чекиттеринин радиус-векторлору болгондуктан:

$\vec{OB}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$,

$\overline{OA}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$.

Анда $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-$

$-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ болот.

Демек, вектордун баштапкы жана акыркы чекиттеринин координаталары белгилүү болсо, анда **вектордун координаталары** тиешелүү түрдө акыркы жана баштапкы чекитттеринин координаталарынын айырмасына барабар болот:

$$\vec{AB}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}.$$

Анда $A(x_1,y_1,z_1)$ жана $B(x_2,y_2,z_2)$ чекиттеринин **арасындагы аралыкты** төмөнкү формула менен эсептөөгө болот:

$$d=|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,. \qquad (6)$$

6-мисал. Абцисса огунда $A(3;4)$ чекитинен узундугу 5 ке барабар болгон аралыкта жайгашкан B чекитин тапкыла.

Чыгаруу. Ox огунда жаткан чекиттин координатасы $B(x,0)$ болот. Анда $A(3;4)$ жана $B(x,0)$ чекиттеринин арасындагы аралык (6) формуланын негизинде $|\vec{AB}|=\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}=5$ болот. Бул барабардыкты жөнөкөйлөтүп, $x^2-6x=0$ теңдемесин алабыз. Теңдеменин тамырлары $x_1=0, x_2=6$ болгондуктан, Ox огунда жатып, $A(3;4)$ чекитинен узундугу 5 ке барабар болгон аралыкта жатуучу эки чекиттин координаталары табылат: $B_1(0,0)$, $B_2(6,0)$.

Эки вектордун арасындагы бурч

(1) формуладан $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ алабыз, б.а.

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

7-мисал. $\vec{a} = \{3;4\}$ жана $\vec{b} = \{1;2\}$ векторлорунун арасындагы бурчту тапкыла.

Чыгаруу. Алдын ала бул векторлордук скалярдык көбөйтүндүсүн жана алардын узундуктарын табалы:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 1 + 4\cdot 2 = 11,\ |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,\ |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Жогорудагы формулага койсок, $\cos\varphi = \dfrac{11}{5\sqrt{5}}$ келип чыгат. Мындан

$\varphi = \arccos\dfrac{11}{5\sqrt{5}}$ болот.

8-мисал. Үч бурчтуктун чокулары берилген $A(1;2)$, $B(3,4)$, $C(6,2)$. A чокусундагы ички бурчту тапкыла.

Чыгаруу. $\vec{AB} = \{2;2\}$, $\vec{AC} = \{5;0\}$ векторлорун карайлы жана бул эки вектордун арасындагы φ бурчун табалы. $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = |\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cos\varphi$ болгондуктан

$$\cos\varphi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{2\cdot 5 + 2\cdot 0}{\sqrt{2^2 + 2^2}\cdot\sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{10}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{25}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

алабыз. Анда $\varphi = 45^0$ барабар.

Мына ушул формуладан эки вектордун **перпендикулярдуулук белгиси** келип чыгат: *$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ нөлдүк эмес векторлорунун перпендикулярдуу болушу үчүн, алардын скалярдык көбөйтүндүсүнүн нөлгө барабар болушу зарыл жана жетиштүү, б.а.*

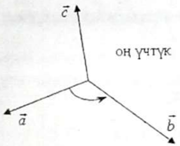
$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0.$$

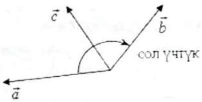
3.4. Векторлордун вектордук көбөйтүндүсү

Башталыштары бир чекитте жаткан компланардуу эмес үч $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлору берилсин.

Эгерде үчүнчү $\bar{c}$ векторунун акырынан караганда $\bar{a}$ векторунан $\bar{b}$ векторуна карай эң кыска буруу саат жебесине карама-каршы *багытта болсо, анда* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *векторлору* ***оң үчтүктү*** *түзөт деп айтабыз.*

Эгерде үчүнчү $\vec{c}$ *векторунун акырынан карaганда* $\vec{a}$ *векторунан* $\vec{b}$ *векторуна карай эң кыска буруу саат жебесинин багыты менен дал келсе, анда* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *векторлору* ***сол үчтүктү*** *түзөт деп айтабыз.*



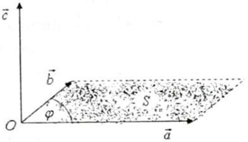


$\vec{a}$ *векторун* $\vec{b}$ *векторуна* ***вектордук көбөйтүү*** *деп, төмөнкү шарттарды канаатандыруучу* $\vec{c}$ *векторун айтабыз:*

1) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $\vec{c}$ *векторунун узундугу* $\vec{a}$ *жана* $\vec{b}$ *векторлоруна тургузулган параллелограмдын аянтына барабар, б.а.*

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi, \ \varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b});$$



3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *векторлору оң үчтүктү түзүшөт.*

Вектордук көбөйтүндү $\vec{a} \times \vec{b}$ же $[\vec{a}, \vec{b}]$ аркылуу белгиленет жана төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

1°. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;

2°. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$;

3°. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$;

4°. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Вектордук көбөйтүндүнү координаталар аркылуу туюнтуу

$\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}$ жана $\vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}$ векторлору берилсин. Вектордук көбөйтүндүнү бул векторлорду көп мүчө сыяктуу көбөйтүп табалы:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})\times(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k})=x_ax_b(\vec{i}\times\vec{i})+x_ay_b(\vec{i}\times\vec{j})+$$

$$+x_az_b(\vec{i}\times\vec{k})+y_ax_b(\vec{j}\times\vec{i})+y_ay_b(\vec{j}\times\vec{j})+y_az_b(\vec{j}\times\vec{k})+z_ax_b(\vec{k}\times\vec{i})+$$

$$+z_ay_b(\vec{k}\times\vec{j})+z_az_b(\vec{k}\times\vec{k})=$$

$$=\vec{0}+x_ay_b\vec{k}-x_az_b\vec{j}-y_ax_b\vec{k}+\vec{0}+y_az_b\vec{i}+z_ax_b\vec{j}-z_ay_b\vec{i}+\vec{0}=$$

$$=(y_az_b-z_ay_b)\vec{i}-(x_az_b-z_ax_b)\vec{j}+(x_ay_b-y_ax_b)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}\vec{k},$$

б.а.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}\vec{k}, \qquad (7)$$

векторлорду вектордук көбөйтүүнүн жыйынтыгы вектор боло турганын эскертип кетели.

Бул (7) формуланы оңой эсте кала тургандай кылып, кыскача, үчүнчү тартиптеги аныктагычтын биринчи жолчосу боюнча ажыратылышы аркылуу төмөндөгүдөй жазса да болот:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

9-мисал. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу. Жогорудагы формуланы пайдаланып

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$=-13\,\vec{i}+5\,\vec{j}-11\,\vec{k}$ алабыз.

Векторлордун коллинеардуулугун орнотуу

Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору коллинеардуу болсо, алардын вектордук көбөйтүндүсү нөлгө барабар болот, б.а. $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$ жана тескерисинче, эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсү нөлгө барабар болсо, анда алар коллинеардуу болот, б.а.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}=\vec{0}\Rightarrow\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}.$$

Параллелограммдын жана үч бурчтуктун аянтын табуу

Векторлорду вектордук көбөйтүүнүн аныктамасы боюнча $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$ барабар, б.а. $S_{ïàð}=|\vec{a}\times\vec{b}|$. Анда үч бурчтуктун аянты $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

10-мисал. Чокулары $A(2;3;1)$, $B(5;6;3)$, $C(7;1;10)$ чекиттери болгон үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

Чыгаруу. Үч бурчтуктун жактары менен дал келүүчү $\vec{AB}$ жана $\vec{AC}$ векторлорун карайлы: $\vec{AB}=3\,\vec{i}+3\,\vec{j}+2\,\vec{k}$, $\vec{AC}=5\,\vec{i}-2\,\vec{j}+9\,\vec{k}$. Вектордук көбөйтүндүнүн модулу параллелограммдын аянтына барабар болгондуктан $\vec{AB}\times\vec{AC}$ вектордук көбөйтүндүнүн модулунун жарымына барабар болот $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$. Алдын ала $\vec{AB}\times\vec{AC}$ табалы

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 3 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 9\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 9\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix}3 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}\vec k=31\,\vec i-17\,\vec j-21\,\vec k\,.$$

Анда,

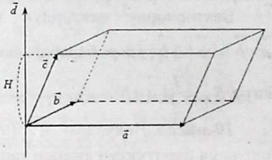
$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\,\vec{AB}\times\vec{AC}\,|=\frac{1}{2}\left|31\,\vec i-17\,\vec j-21\,\vec k\right|=\frac{1}{2}\sqrt{31^2+17^2+21^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1691}\,.$$

3.5. Үч вектордун аралаш көбөйтүндүсү

$\vec a$, $\vec b$ *жана* $\vec c$ *үч векторлорунун көбөйтүндүсүн карайлы:* $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$. *Бул жерде биринчи эки вектор вектордук түрдө көбөйтүлүп, анын жыйынтыгы үчүнчү векторго скалярдык түрдө көбөйтүлөт. Векторлордун мындай көбөйтүндүсүн* ***вектордук-скалярдык же векторлордун аралаш*** *көбөйтүндүсү деп аталат. Аралаш көбөйтүндүнүн жыйынтыгы* ***сан*** *болот.*

$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$ көбөйтүндүсүнүн геометриялык маанисин карап көрөлү.

Кырлары $\vec a$, $\vec b$ жана $\vec c$ векторлору болгон параллелепипед тургузалы, мында $\vec d=\vec a\times\vec b$ ($\vec d\perp\vec a$, $\vec d\perp\vec b$ - вектордук көбөйтүндүнүн аныктоосунун 1-шарты).



Бизге белгилүү

$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=\vec d\cdot\vec c=|\,\vec a\,|\cdot \text{ïð}_{\vec d}\,\vec c,\ |\,\vec d\,|=|\,\vec a\times\vec b\,|=S,$$

мында S саны $\vec a$ жана $\vec b$ векторлоруна тургузулган параллелограммдын аянты, $\text{ïð}_{\vec d}\,\vec c=H$ векторлордун оң үчтүгү үчүн, $\text{ïð}_{\vec d}\,\vec c=-H$ -

векторлордун сол үчтүгү үчүн, мында H - параллепипеддин бийиктиги. Анда $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = S\cdot(\pm H)$, б.а. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \pm V$, мында V - $\vec{a},\ \vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлоруна тургузулган параллепипеддин көлөмү.

Мына ошентип, үч вектордун аралаш көбөйтүндүсү $\vec{a},\ \vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлоруна тургузулган **параллелепипеддин көлөмүнө** барабар. Эгерде бул векторлор оң үчтүктү түзсө, анда V саны "плюс" белгиси менен, ал эми векторлор сол үчтүктү түзсө - "минус" белгиси менен алынат.

Аралаш көбөйтүндүнүн касиеттери

1°. Аралаш көбөйтүндү анын көбөйтүүчүлөрүнүн орундарын циклдик алмаштырууда өзгөрбөйт, б.а.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

Чындыгында бул учурда параллепипеддин көлөмү да, анын кырларынын ориентациясы да өзгөрбөйт.

2°. Вектордук жана скалярдык көбөйтүү амалдарынын орундарын алмаштырууда да аралаш көбөйтүндү өзгөрбөйт, б.а. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Бул касиеттерден векторлордун $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ аралаш көбөйтүндүсүн вектордук жана скалярдык көбөйтүүлөрдүн белгилерисиз эле $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ түрүндө жазууга мүмкүн экендиги келип чыгат.

3°. Аралаш көбөйтүндү каалаган эки вектордун ордун алмаштырганда өзүнүн белгисин өзгөртөт, б.а. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$.

4°. Нөлдүк эмес $\vec{a},\ \vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлорунун аралаш көбөйтүндүсү бул векторлор компланардуу болгондо гана нөл болот, б.а. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ - компланардуу.

Аралаш көбөйтүндүнүн координаталар аркылуу туюнтуу

$\vec{a} = x_a\,\vec{i} + y_a\,\vec{j} + z_a\,\vec{k}$, $\quad \vec{b} = x_b\,\vec{i} + y_b\,\vec{j} + z_b\,\vec{k}$ жана $\vec{c} = x_c\,\vec{i} + y_c\,\vec{j} + z_c\,\vec{k}$ векторлорунун аралаш көбөйтүндүсүн вектордук жана скалярдык көбөйтүү эрежелеринин негизинде табабыз:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot (x_c\,\vec{i} + y_c\,\vec{j} + z_c\,\vec{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (x_c\,\vec{i} + y_c\,\vec{j} + z_c\,\vec{k}) = \qquad (8)$$

$$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c .$$

Бул формуланы кыскача төмөндөгүдөй жазса болот:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} .$$

(8) формула аныктагычтын 3-жолчосу боюнча ажыратылышын берет.

Демек, ***үч вектордун аралаш көбөйтүндүсү*** *бул векторлордун координаталарынан түзүлгөн үчүнчү тартиптеги аныктагычтын маанисине барабар.*

Эгерде үч вектордун аралаш көбөйтүндүсү $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$ болсо, анда $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлору оң үчтүктү, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$ болсо, сол үчтүктү түзөт.

Компланардуу векторлордун аралаш көбөйтүндүсү нөлгө барабар, б.а. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$. Мейли үч вектор тең бир тегиздикте жатышсын. Анда $\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b}$ вектору берилген тегиздикке перпендикуляр болот. Демек, $\vec{d} \perp \vec{c}$ болот. Ошондуктан $\vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ болот.

Тескерисинче, эгерде $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ болсо, анда алар компланардуу векторлор болушат. Чындыгында, бул векторлор компланардуу эмес болсо, анда бул векторлорго тургузулган параллелепипеддин көлөмү $V \neq 0$ болот. Параллелепипеддин көлөмү

$V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$ болгондуктан, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \neq 0$ экендиги келип чыгат. Демек. векторлор компланардуу.

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлору компланардуу болушу үчүн алардын

аралаш көбөйтүндүсүнүн нөлгө барабар болушу зарыл жана жетиштүү, б.а.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \text{ же } \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0.$$

11-мисал. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k},\ \vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$

векторлорунун компланардуу экендигин көрсөткүлө.

Чыгаруу. Бул векторлордун аралаш көбөйтүндүсүн түзөлү:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(-18 + 48) - 3(12 - 12) + 2(24 - 9) = 0.$$

Аралаш көбөйтүндү нөл болгондуктан бул векторлор компланардуу.

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлоруна тургузулган параллелепипеддин көлөмү

$V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$ барабар, ал эми бул векторлорго тургузулган пирамиданын көлөмү элементардык геометриядан бизге белгилүү болгондой параллелепипеддин көлөмүнүн $\frac{1}{6}$ не барабар, б.а. $V = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$.

12-мисал. Чокулары $A(1;2;3), B(0-1;1), C(2;5;2), D(3;0;-2)$ чекиттери болгон пирамиданын көлөмүн тапкыла.

Чыгаруу. $\vec{AB} = \vec{a},\ \vec{AC} = \vec{b},\ \vec{AD} = \vec{c}$ векторлордун координаталарын табалы:

$\vec{AB} = \{-1;-3;-2\}\ \vec{AC} = \{1;3-1\},\ \vec{AD} = \{2;-2;-5\}$.

Бул үч вектордун аралаш көбөйтүндүсүн табабыз:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-17) + 3\cdot(-3) - 2\cdot(-8) = 24.$$

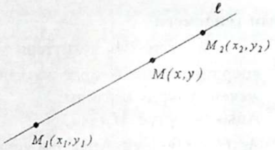
Анда $V = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4.$

4-ГЛАВА. ТЕГИЗДИКТЕГИ СЫЗЫКТАР

4.1. Эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси

Бизге мектеп курсунан белгилүү болгондой, эки чекит аркылуу бир гана түз сызык өтөт. Тегиздикте $M_1(x_1, y_1)$ жана $M_2(x_2, y_2)$ чекиттеринин декарттык координаталары белгилүү болсо, бул чекиттер аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин табалы.

ℓ түз сызыгында координаталары x, y болгон M чекитин алабыз.



$M(x,y)$ чекити ℓ түз сызыгында $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ жана $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$ векторлору коллинеардуу болгондо гана жатат, б.а.

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Мында λ - кандайдыр бир сан. Вектордук барабардыктан алардын координаталарынын барабардыгы келип чыгат

$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1)$. Мындан

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda$, $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda$ алабыз. Анда

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (1)$$

*(1) теңдеме **эки чекит аркылуу өтүүчү** түз сызыктын теңдемеси деп аталат.*

(1) теңдеме $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$ болгон учурда гана туура болот. Эгерде $x_2 - x_1 = 0$ болсо, анда ℓ түз сызыгы Oy огуна параллель болуп, анын теңдемеси $x - x_1 = 0$ же $x = x_1$ болот, ал эми y координатасы каалагандай болот. Эгерде $y_2 - y_1 = 0$ болсо, анда ℓ түз сызыгы Ox огуна параллель болуп, анын теңдемеси $y - y_1 = 0$ же $y = y_1$ көрүнүшкө ээ жана x координатасы каалагандай болот.

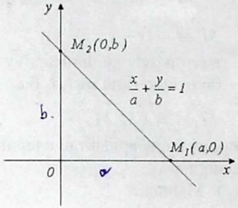
1-мисал. Үч бурчтуктун чокулары $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(-1,1)$ берилген. Алардын жактарынын теңдемелерин жазгыла.

Чыгаруу. A жана B чокулары аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин (1) формуланын жардамында табалы. Мында

$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 2,\ y_2 = 1$. Анда AB түз сызыгынын теңдемеси: $\frac{x-0}{2-1} = \frac{y-0}{1-0}$ же $y = \frac{1}{2}x$ болот. Ушул эле сыяктуу AC түз сызыгынын теңдемеси: $\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-0}{1-0}$ же $y = -x$ болот.

BC түз сызыгынын теңдемесин табууда өзгөчөлүк пайда болот, анткени $y_2 - y_1 = 1 - 1 = 0$. Бул учурда B жана C чокусу аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси Ox огуна параллель болуп $y - 1 = 0$ теңдемесинен табылат, б.а. $y = 1$ теңдемеси болот.

4.2. Кесиндидеги түз сызыктын теңдемеси



M_1 жана M_2 чекиттери координаталык октордо жаткан жекече учурду карайлы. Аныктык үчүн $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$ болсун. Анда эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесинин формуласын пайдаланып $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$ алабыз же

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2)$$

*(2) теңдеме **түз сызыктын кесиндидеги** теңдемеси деп аталат.*

2-мисал. Координата октору жана $\frac{x}{10} - \frac{y}{5} = 1$ түз сызыгы менен чектелген үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

Чыгаруу. Үч бурчтуктун аянтынын формуласы $S_\Delta = \frac{1}{2}|a \cdot b|$. Бизде $a = 10,\ b = -5$ болгондуктан, ордуна койсок $S_\Delta = \frac{1}{2}|a \cdot b| = \frac{1}{2}|10 \cdot (-5)| = 25,\ S_\Delta = 25$ келип чыгат.

4.3. Бурчтук коэффициенти аркылуу берилген түз сызыктын теңдемеси

Oxy тегиздигинде координата окторуна параллель болбогон каалаган түз сызык алабыз. Бул түз сызык Oy огун $N(0,b)$ чекитинде кесип өтүп Ox огу менен α бурчун түзсүн.

Түз сызыктын α $(0 \le \alpha < \pi)$ жантаюу бурчу деп, түз сызык менен Ox огу кесилишкен чекиттин айланасында Ox огун саат жебесине каршы багытта түз сызык менен дал келгенге чейин буруу бурчун айтабыз.

Берилген түз сызыкта каалаган $M(x,y)$ чекитин алабыз. N чекити аркылуу Ox огуна параллель жана аны менен бирдей багытталган Nx' огун жүргүзөбүз. Nx' огу менен түз сызыктын ортосундагы бурч α га барабар. $Nx'y$ системасында M чекити x жана $y-b$ координаталарына ээ. Бурчтун тангенсинин аныктоосунун негизинде $tg\alpha = \dfrac{y-b}{x}$ болот, б.а. $y = tg\alpha \cdot x + b$ алабыз. Мындан $tg\alpha = k$ белгилөөсүн жүргүзүп,

$$y = kx + b \tag{3}$$

теңдемесин алабыз. Бул түз сызыкта жатуучу каалаган $M(x,y)$ чекитинин координатасы (3) теңдемени канааттандырат.

$k = tg\alpha$ саны түз сызыктын ***бурчтук коэффициенти,*** *ал эми (3) теңдеме* ***бурчтук коэффициенти аркылуу*** *берилген түз сызыктын теңдемеси деп аталат.*

Эгерде түз сызык координата башталышы аркылуу өтсө, анда $b = 0$ болот жана теңдеме $y = kx$ көрүнүшүнө келет.

Эгерде түз сызык Ox огуна параллель болсо, анда $\alpha = 0$, $k = tg\alpha = 0$ болуп, (3) формула $y = b$ түрүнө келет.

Эгерде түз сызык Oy огуна параллель болсо, анда $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ болуп, (3) теңдеме маанисин жоготот, себеби ал үчүн бурчтук коэффициент $k = tg\alpha = tg\dfrac{\pi}{2}$ жашабайт. Бул учурда түз сызыктын теңдемеси $x = a$ түрүнө келет, мында a - түз сызык менен Ox огунун кесилишкен чекити.

4.4. Берилген багыт боюнча берилген чекит аркылуу отүүчү түз сызыктын теңдемеси

Бурчтук коэффициенти k болгон жана $M_1(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин табуу маселесин коёлу.

Маселени чечүү үчүн (3) формуланы пайдалансак болот, себеби $M_1(x_1, y_1)$ чекити берилген түз сызыкта жатат жана аны канааттандырат, б.а. $y_1 = kx_1 + b$. Мында b белгисиз сан, ошондуктан аны табабыз $b = y_1 - kx_1$. Табылган белгисиз санды (3) формулага коюп $y = kx + y_1 - kx_1$ же

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{4}$$

алабыз.

*(4) формула **берилген багыт боюнча берилген чекит аркылуу отүүчү түз** сызыктын теңдемеси деп аталат.*

(4) формуланы (1) формуладан анын эки жагын тең $y_2 - y_1$ айырмасына бөлүү аркылуу алса да болот: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Эгерде $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ белгилөөсүн жүргүзсөк, анда $y - y_1 = k(x - x_1)$ формуласын алабыз.

3-мисал. $M_1(-1, 2)$ чекити аркылуу өтүп, $y = -3x + 1$ түз сызыгына параллель болгон түздүн теңдемесин тапкыла.

Чыгаруу. Биз издеп жаткан түз сызык $y = -3x + 1$ түз сызыгына параллель болгондуктан, анын бурчтук коэффициенти $k = -3$ болот. Анда (4) формуланы пайдалансак $y - 2 = -3(x + 1)$ болот, б.а. $y = -3x - 1$ теңдемесин алабыз.

4-мисал. $M_1(-3, -1)$ чекити аркылуу өтүп, $2x + y - 3 = 0$ түз сызыгына параллель болгон түздүн теңдемесин тапкыла.

Чыгаруу. Бул түз сызыкты $y = -2x + 3$ көрүнүшүндө жазып алып, бурчтук коэффициенти $k_1 = -2$ экенин аныктайбыз. Өз ара перпендикуляр болгон түз сызыктардын бурчтук коэффициенттери $k_1 k_2 = -1$ шарты менен байланышкандыктан, изделүүчү түздүн бурчтук коэффициенти $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = \dfrac{1}{2}$ болот. Анда (4) формуладан $y + 1 = \dfrac{1}{2}(x + 3)$ же $x - 2y + 1 = 0$ алабыз.

4.5. Түз сызыктын жалпы теңдемеси

x жана y карата сызыктуу болгон жалпы түрүндөгү

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5)$$

теңдемени карайлы, мында A, B, C - каалагандай сандар (A жана B бир учурда нөл эмес).

(5) теңдеме түз сызыктын ***жалпы*** *теңдемеси деп аталат.*

(5) теңдемени өзгөртүп жазалы: $By = -Ax - C$. Барабардыктын эки жагын B га бөлүп, $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$ алабыз. $-\frac{A}{B} = k = tg\alpha,\ -\frac{C}{A} = b$ деп белгилөөлөрүн жүргүзүп, бурчтук коэффициенти менен берилген $y = kx + b$ теңдемесин келтирип чыгарабыз.

Эгерде 1) $A = 0$ болсо, анда (5) формула $y = -\frac{C}{B}$ теңдемесине айланып, түз сызык Ox огуна параллель болот;

2) $B = 0$ болсо, анда (5) формула $x = -\frac{C}{A}$ теңдемесине айланып, түз сызык Oy огуна параллель болот;

3) $C = 0$ болсо, анда (5) формула $y = -\frac{A}{B}x$ теңдемесине айланып, түз сызык координата башталышы аркылуу өтөт.

Эгерде түз сызык (5) түрдө берилсе, анда анын ***нормалдык векторунун*** *координатасы $\overrightarrow{N} = \{A, B\}$, ал эми* ***багыттоочу векторунун*** *координатасы $\vec{l} = \{-B, A\}$ болот.*

5-мисал. $y = \frac{1}{2}x - 5$ түз сызыгынын жалпы теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. Түз сызыктын теңдемесинин эки жагын тең 2 ге көбөйтүп, бардык кошулуучуларды сол жакка алып өтөбүз: $-x + 2y + 10 = 0$. Мындан -1 ге кобойтүп, $x - 2y - 10 = 0$ теңдемесине ээ болобуз.

6-мисал. $x - y + 2 = 0,\ y = 2x + 1,\ x = 7$ түз сызыктарынын нормалдык жана багытточу векторлорун тапкыла.

Чыгаруу. 1) $\overline{N} = \{1, -1\}, \vec{l} = \{1, 1\}$; 2) $\overline{N} = \{2, -1\}, \vec{l} = \{1, 2\}$;

3) $\overline{N} = \{1, 0\}, \vec{l} = \{0, 1\}$.

4.6. Берилген чекит аркылуу өтүүчү жана берилген векторго параллель болгон түз сызыктын теңдемеси

Декарттык координаталар системасында $M_1(x_1, y_1)$ чекити жана $\vec{l} = \{a, b\}$ вектору берилсин. $M_1(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өтүүчү жана $\vec{l} = \{a, b\}$ багыттоочу векторуна параллель болгон ℓ түз сызыгын тургузуу талап кылынсын.

ℓ түз сызыгында каалагандай $M(x, y)$ чекитин алабыз. $M(x, y)$ чекити ℓ түз сызыгында $\overline{M_1M}$ вектору $\vec{l}$ векторуна коллинеардуу болгондо гана, б.а $\overline{M_1M} = \lambda\vec{l}$ (λ- каалаган сан) болгондо гана жатат. Бул вектордук барабардыктан, алардын координаталарынын барабардыгы келип чыгат: $x - x_1 = \lambda a,\ y - y_1 = \lambda b$. Мындан λ ны жоюп, төмөнкү формуланы алабыз:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}. \qquad (6)$$

*(6) формула $\vec{l} = \{a, b\}$ багыттоочу вектору менен берилген түз сызыктын **каноникалык теңдемеси** деп аталат.*

7-мисал. $M(1,2)$ чекити аркылуу өтүүчү жана $\vec{l} = \{4;3\}$ векторуна параллель болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. (6) формуланы пайдаланып, $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3}$ алабыз.

Мындан $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ теңдемесине ээ болобуз.

4.7. Берилген чекит аркылуу өтүүчү жана берилген векторго перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемеси

$M_1(x_1, y_1)$ чекити жана $\overline{N} = \{A, B\}$ вектору берилсин. $M_1(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өтүүчү жана $\overline{N} = \{A, B\}$ нормаль векторуна перпендикуляр болгон ℓ түз сызыгын тургузуу талап кылынсын.

ℓ түз сызыгында каалагандай $M(x, y)$ чекитин алабыз. $M(x, y)$ чекити ℓ түз сызыгында $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$ вектору $\overline{N}$ векторуна перпендикуляр болгондо гана, б.а. $\overline{N} \cdot \overline{M_1M} = 0$ болгондо гана жатат. Бул барабардык векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү болгондуктан

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (7)$$

алабыз.

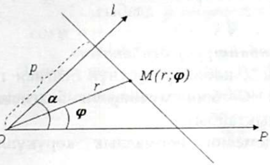
*(7) формула берилген чекит аркылуу өтүүчү жана **берилген $\overline{N}$ векторуна перпендикуляр болгон** түз сызыктын теңдемеси болот.*

8-мисал. $M_1(1,-1)$ чекити аркылуу өтүүчү жана $\overrightarrow{N}=\{-1;1\}$ векторуна перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу. $M(x,y)$ алабыз. $\overrightarrow{MM_1}=\{x-1;y+1\}$ векторун табабыз. (7) формуланы пайдалансак: $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{MN}=0\Rightarrow -1\cdot(x-1)+1\cdot(y+1)=0\Rightarrow$ $y=x-2$ болот.

4.8. Түз сызыктын полярдык теңдемеси

Полярдык координаталардагы түз сызыктын полярдык теңдемесин табалы. Ал үчүн O полюсунан берилген a түз сызыгына перпендикуляр болгон ℓ огун тургузабыз. Түз сызыкты мүнөздөө үчүн O полюсунан берилген түз сызыкка чейинки p аралыгын жана OP полярдык огу менен ℓ огунун арасындагы α бурчун көрсөтүү керек.



Берилген түз сызыктагы каалаган $M(r;\varphi)$ чекити үчүн

$ïð_{\ell}\overline{OM}=p$ болот.

Экинчи жактан $ïð_{\ell}\overline{OM}==\left|\overline{OM}\right|\cdot cos(\alpha-\varphi)=$

$=r\cdot cos(\varphi-\alpha)$ болгондуктан

$$r\cdot cos(\varphi-\alpha)=p \tag{8}$$

алабыз.

(8) формула түз сызыктын ***полярдык координаталардагы*** *теңдемеси деп аталат.*

4.9. Түз сызыктын нормалдык теңдемеси

Түз сызыктын полярдык координаталарындагы теңдемесинен түз сызыктын нормалдык теңдемесин келтирип чыгаруу мүмкүн. Ал үчүн тик бурчтуу координаталар системасын карайбыз. Бул тик бурчтуу координаталар системасында O чекитин полюс деп, Ox огун полярдык огу катары карайбыз. (8) теңдемени $r\cdot cos(\varphi-\alpha)-p=0$ көрүнүшүндө жазып алабыз, б.а. $r\cdot cos\varphi cos\alpha+r\,sin\varphi\,sin\alpha-p=0$. Полярдык жана тик бурчтуу координаталар системасы $r\,cos\varphi=x,\ r\,sin\varphi=y$ формулалары менен байланышкандыктан

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (9)$$

формуласын алабыз.

Демек, түз сызыктын полярдык координаталардагы теңдемеси тик бурчтуу координаталар системасында (9) көрүнүштө болот.

*(9) формула **түз сызыктын нормалдык теңдемеси** деп аталат.*

(5) теңдемеден (9) теңдеменин кантип келип чыккандыгын көрсөтөлү. (5) теңдеменин эки жагын тең кандайдыр бир $\lambda \neq 0$ көбөйтүүчүсүнө көбөйтүп, $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ алабыз. Бул теңдеме (9) теңдеме менен дал келиши керек, б.а. $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \sin\alpha$, $\lambda C = -p$ барабардыктары аткарылышы керек. Биринчи эки барабардыктан $\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, б.а. $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ алабыз.

*λ көбөйтүүчүсү **нормалдык көбөйтүүчү** деп аталат.*

Ал эми үчүнчү барабардыктан λ көбөйтүүчүсүнүн белгиси түз сызыктын жалпы теңдемесиндеги C бош мүчөсүнүн белгисине карама-каршы боло тургандыгын аныктайбыз.

9-мисал. $-3x + 4y + 15 = 0$ теңдемесин нормалдык көрүнүшкө келтиргиле.

Чыгаруу. Эң оболу нормалдык көбөйтүүчүнү табабыз: $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\dfrac{1}{5}$. Мындагы минус белгиси теңдемеге катышкан бош мүчөнүн белгиси плюс болгондуктан тандалып алынды. Эгерде теңдемени $\lambda = -\dfrac{1}{5}$ көбөйтүүчүсүнө көбөйтсөк, анда түз сызыктын

нормалдык теңдемесин алабыз: $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - 3 = 0$.

4.10. Эки түз сызыктын арасындагы бурч. Параллелдүүлүк жана перпендикулярдуулук шарттары

Бизге ℓ_1 жана ℓ_2 түз сызыктары тиешелүү түрдө $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ теңдемелери менен берилсин. Бул түз сызыктардын нормалдык векторлору $\overline{N_1} = \{A_1; B_1\}$, $\overline{N_2} = \{A_2; B_2\}$ түрүндө болот. Анда эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн аныктоосунун негизинде $\cos\psi = \dfrac{\left|\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}\right|}{\left|\overline{N_1}\right| \cdot \left|\overline{N_2}\right|}$ алабыз.

Мындан нормалдык векторлордун координаталары аркылуу жазсак

$$cos\,\psi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (10)$$

формуласын алабыз.

*(10) формула **эки түз сызыктын арасындагы бурчту** аныктоо формуласы деп аталат.*

10-мисал. $x - 2y = 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.

Чыгаруу. Берилген түз сызыктардын нормалдык векторлору $\overline{N_1} = \{1;-2\}$, $\overline{N_2} = \{2;1\}$ болот. (10) формуланы пайдалансак:

$$cos\psi = \frac{|2-2|}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{2+1}} = 0, \;\; cos\psi = 0, \;\; \psi = 90^0.$$

Эгерде түз сызыктар $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ көрүнүшүндө берилсе, анда алардын арасындагы бурч

$$tg\psi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (11)$$

формуласы менен табылат.

11-мисал. $y = -3x + 6$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.

Чыгаруу. Бурчтук коэффициенттер $k_1 = -3, k_2 = -\frac{1}{2}$ болгондуктан, (11) формуладан $tg\psi = \dfrac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + (-3)(-\frac{1}{2})} = 1$ алабыз. Мындан $\psi = \frac{\pi}{4}$ болот.

*Берилген $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ түз сызыктары **перпендикуляр** болушу үчүн*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (12)$$

шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

*Берилген $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ түз сызыктары **параллель** болушу болушу үчүн*

$$\frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} = 0 \qquad (13)$$

шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

12-мисал. Түз сызыктардын жайланышуу абалын тапкыла:

1) $6x - 15y + 7 = 0$ жана $10x + 4y - 1 = 0$;

2) $5x-7y-4=0$ жана $3x+2y-13=0$;

3) $x-2y+1=0$ жана $2x-4y-1=0$.

Чыгаруу. 1). $\overline{N_1}=\{6;-15\}$, $\overline{N_2}=\{10;4\}$ нормалдык векторлорунун координаталарын (12) формулага коебуз: $6\cdot 10+(-15)\cdot 4=0$. Мындан (12) шарттын аткарылышы келип чыгат. Демек, бул эки түз сызык перпендикуляр болот.

2). Бул учурда $\overline{N_1}=\{5;-7\}$, $\overline{N_2}=\{3;2\}$. (12) формулага коюп көрөлү: $5\cdot 3+(-7)\cdot 2=1\neq 0$, б.а. (12) шарт аткарылбайт экен. (13) формулага коебуз: $\frac{5}{3}\neq-\frac{7}{2}$. Демек, (12) шарт да аткарылбайт экен. Ошондуктан бул эки түз сызык перпендикуляр да, параллель да эмес.

3). $\overline{N_1}=\{1;-2\}$, $\overline{N_2}=\{2;-4\}$. (13) формулага коюп көрөлү: $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}$. Демек, (13) шарт аткарылат. Анда берилген түз сызыктар параллель болушат.

4.11. Берилген чекиттен түз сызыкка чейин аралык

ℓ түз сызыгы, $Ax+By+C=0$ теңдемеси жана $M_0(x_0,y_0)$ чекити берилсин.

$M_0(x_0,y_0)$ чекитинен ℓ түз сызыгына чейинки аралык

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{14}$$

формуласы менен табылат.

13-мисал. $M_0(2,-1)$ чекитинен $3x+4y-22=0$ түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

Чыгаруу. $d=\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)-22|}{\sqrt{9+16}}=\frac{20}{5}=4$.

5-ГЛАВА. ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТАР

5.1. Негизги түшүнүктөр

Тегиздикте Oxy декарттык координаталар системасы берилген болсун.

Координаталары

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

теңдемени канааттандыруучу тегиздиктеги чекиттердин көптүгү ийри сызык, ал эми (1) теңдеме ал ийри сызыктын теңдемеси деп аталат.

Эгерде сызык декарттык x жана y өзгөрмөлөрүнө карата n – даражадагы теңдеме менен аныкталса, анда ал n – ***тартиптеги сызык*** *деп аталат.*

Жогоруда биз караган түз сызыктын жалпы теңдемеси $Ax + By + C = 0$ 1-тартиптеги сызык деп аталат. Эми биз экинчи тартиптеги ийри сызыктарды карайбыз. Декарттык координаталар системасында экинчи тартиптеги ийрилердин жалпы теңдемеси

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{2}$$

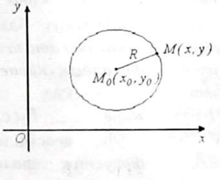
мында $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, көрүнүштө болот.

(2) теңдеме тегиздикте айлананы, эллипсти, гиперболаны жана параболаны аныктайт. Экинчи тартиптеги сызыктарга өтүүдөн алдын аталган фигуралардын касиеттерин карап чыгалы.

5.2. Айлана

Экинчи тартиптеги ийрилердин эң жөнөкөйү болуп айлана эсептелет.

Радиусу R, борбору $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде болгон ***айлана*** *деп, M_0 чекитинен R аралыкта жатуучу $M(x,y)$ чекиттеринин геометриялык ордун айтабыз.*



Тегиздиктеги эки чекиттин арасындагы аралыкты табуунун формуласы боюнча $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$, б.а.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{3}$$

теңдемесин алабыз.

(3) теңдеме айлананын ***канoникалык теңдемеси*** *деп аталат.*

Эгерде айланын борбору координата башталышы менен дал келсе, б.а. $x_0 = 0, y_0 = 0$ болсо, анда айланын теңдемеси

$$x^2 + y^2 = R^2$$

көрүнүштө болот.

(3) теңдемени төмөнкүдөй жазып алабыз:

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

алабыз.

Бул теңдемеде (2) теңдеменин айрым бир учуру болуп эсептелет:

$A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\ D = -y_0,\ E = -y,\ F = x_0^2 + y_0^2 - R,\ A^2 + B^2 + C^2 = 2 \neq 0.$

Тескерисинче, эгерде айлананын жалпы теңдемеси (2) теңдеме түрүндө берилсе, анда анын теңдемесин каноникалык көрүнүшкө келтирүүгө болот.

1-мисал. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ экинчи тартиптеги ийриси кайсы фигураны аныктайт.

Чыгаруу. Бул теңдемени төмөнкүдөй өзгөртөбүз $(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 3 = 0$, б.а. 4 жана 9 сандарын кошуп андан соң кемиттик. Кашаанын ичиндеги туюнтмаларда кыскача көбөйтүүнүн формулаларын эске алсак

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$

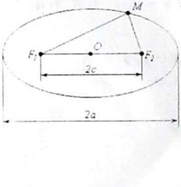
теңдемесине ээ болобуз. Демек, бул теңдеме радиусу $R = 4$, борбору $M_0(2, -3)$ чекитинде болгон айлананын каноникалык теңдемесин аныктайт.

5.3. Эллипс

Берилген М чекитинен фокустары деп аталуучу F_1 жана F_2 чекиттерине чейинки аралыктардын суммасы турактуу болгон тегиздиктеги чекиттердин геометриялык орду ***эллипс*** *деп аталат.*

Эллипс

$$F_1M + F_2M = 2a$$



Бул эллипстин ***фокалдык касиети*** *болуп эсептелет.*

$F_1(-c,0)$ жана $F_2(c,0)$ чекиттеринин арасындагы $2c = F_1F_2$ аралык - ***фокустук аралык***, F_1F_2 кесиндисинин ортосу - $O(0,0)$ чекитин ***эллипстин борбору***, $2a$ саны –

чоң огунун узундугу (a - ***чоң жарым огу***) деп аталат. Эллипстин каалаган $M(x,y)$ чекитин F_1 жана F_2 фокустары менен туташтыруучу F_1M жана F_2M кесиндилери M чекитинин ***фокалдык радиустары*** деп аталат. Эллипстин чоң огунун узундугу анын фокустук аралыгынан чоң, б.а. $2a > 2c$.

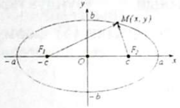
$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ катышы эллипстин ***эксцентриситети*** деп аталат. Эллипстин эксцентриситети $0 \le \varepsilon \le 1$ барабарсыздыгын канааттандырат. Эгерде $\varepsilon = 0$ болсо, б.а. $c = 0$ болсо, анда F_1, F_2 фокустары жана O эллипстин борбору менен дал келет да эллипс a радиустуу айлана менен дал келет.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

теңдемеси ***эллипстин каноникалык*** теңдемеси деп аталат. Бул теңдеме x жана y ке карата экинчи даражада болгондуктан, эллипс ***экинчи тартиптеги сызык*** деп аталат.

(4) эллипстин теңдемесин фокалдык касиетин туюнтуучу геометриялык аныктамасынан келтирип чыгарабыз. Oxy тик бурчтуу координаталар системасын тандап алабыз. Фокустары $F_1(-c,0)$ жана $F_2(c,0)$ чекиттери болсун жана каалаган $M(x,y)$ чекити үчүн $|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$ шарты аткарылсын.

$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$



$\overrightarrow{F_1M}$ жана $\overrightarrow{F_2M}$ векторлорунун узундуктарын табып, координаталык формада жазсак, анда

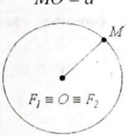
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

алабыз. Радикалдан кутулуп

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ээ болобуз. Төмөнкүдөй белгилөө жүргүзүп $b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ алабыз.

Айлана
$MO = a$



Эки жагын тең $a^2b^2 \ne 0$ бөлүп (4) эллипстин каноникалык теңдемесин алабыз.

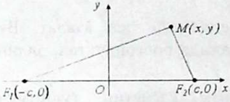
Эгерде эллипстин фокустары дал келсе, анда эллипс айланага айланат, себеби $a = b$. Бул учурда $O \equiv F_1 \equiv F_2$ болот.

$x^2 + y^2 = a^2$ теңдемеси борбору O чекитинде болгон, радиусу a га барабар болгон айлана болот.

5.4. Гипербола

Берилген М чекитинен фокустары деп аталуучу берилген F_1 жана F_2 эки чекиттерине чейинки аралыктарынын айырмасы туруктуу чоңдук болгон тегиздиктеги чекиттердин геометриялык орду ***гипербола*** *деп аталат.*

Гиперболанын теңдемесин келтирип чыгаруу үчүн F_1 жана F_2 фокустары Ox огунда жаткандай кылып Oxy координаталар системасын тандап алабыз жана координата башталышы F_1F_2 кесиндисинин ортосу менен дал келсин.



F_1 жана F_2 фокустарынын арасындагы аралыкты $2c$, ал эми гиперболанын ар бир чекитинен фокустарына чейинки аралыктардын айырмасын $2a$ деп белгилейбиз:

$$F_1F_2 = 2c, \ |MF_1 - MF_2| = 2a. \qquad (5)$$

Мында фокустарынын арасындагы аралыкты ***фокалдык аралык***, ал эми MF_1 жана MF_2 кесиндилери ***фокалдык радиустар*** деп аталат.

Гиперболанын фокалдык радиустарынын узундуктары $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ болгондуктан (5) формулага койсок, анда төмөнкүнү алабыз:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Эллипстин теңдемесин келтирип чыгаруудагы өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (6)$$

теңдемесин алабыз. Гиперболанын аныктамасы боюнча $2a < 2c$ болгондуктан

$$c^2 - a^2 = b^2$$

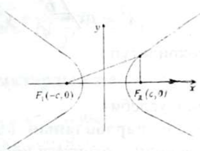
белгилөөсүн жүргүзөбүз. Анда (6) теңдеме

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$

көрүнүшкө келет.

(7) көрүнүштөгү теңдеме ***гиперболанын каноникалык теңдемеси*** деп аталат.

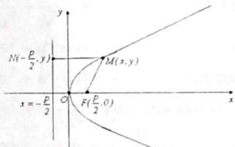
Гипербола да экинчи тартиптеги сызык болот.



5.5. Парабола

Берилген M чекитинен фокусу деп аталуучу F чекитине жана директрисасы деп аталуучу d түз сызыгына чейинки аралыктары барабар болгон тегиздиктеги чекиттердин геометриялык орду ***парабола*** *деп аталат.*

Параболанын теңдемесин келтирип чыгаруу үчүн Oxy координаталар системасын пайдаланабыз. Ox огу F фокусу аркылуу өтүп директрисага перпендикуляр болсун жана координата башталышы директриса менен фокуска чейинки аралыкты тең ортосунан бөлсүн. Тандалып алынган системада F фокусу $(\frac{p}{2}, 0)$ координатасына ээ, ал эми директрисанын теңдемеси $x=-\frac{p}{2}$ көрүнүшкө ээ.



$M(x,y)$ чекити параболанын каалаган чекити болсун. M чекитин F чекити менен туташтыралы. Директрисага перпендикуляр болгондой MN кесиндисин жүргүзөлү. Анда аныктамага ылайык $MF=MN$ шарты аткарылышы керек. Эки чекиттин арасындагы аралыктын формуласынын негизинде

$MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, ал эми $MN = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2}$ алабыз.

Мындан $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2}$ келип чыгат.

Теңдеменин эки жагын квадратка көтөрүп

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

жана жөнөкөйлөтүп

$$y^2 = 2px \qquad (8)$$

теңдемесине келебиз.

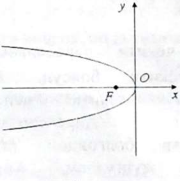
(8) теңдеме **параболанын каноникалык** теңдемеси деп аталат. Парабола экинчи тартиптеги ийри сызык болот.

(8) теңдемеде y өзгөрмөсү жуп даражада, демек парабола Ox огуна карата симметриялуу, б.а. Ox огу симметрия огу. $p > 0$ болгондуктан, (1) формуладан $x \geq 0$ экени келип чыгат. Мындан, парабола Oy огунун оң жагында жайгашканы келип чыгат.

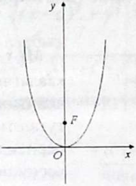
$x = 0$ болгондо $y = 0$ алабыз, анда парабола координата башталышы аркылуу өтөт.

x тин чексиз өсүшү менен y тин модулу да чексиз өсөт. $O(0,0)$ чекити параболанын чокусу деп, ал эми $FM = r$ кесиндиси M чекитинин фокалдык радиусу деп аталат.

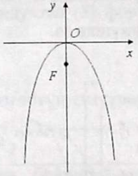
$y^2 = -2px,\ x^2 = 2py,\ x^2 = -2py \ \ (p > 0)$ теңдемелери да параболаны сүрөттөйт.



$y^2 = -2px$



$x^2 = 2py$



$x^2 = -2py$

2-мисал. $y^2 = 6x$ параболасы берилген. Анын директрисасынын теңдемесин жана фокусун тапкыла.

Чыгаруу. Берилген теңдемени параболанын каноникалык теңдемеси менен салыштырып, $2p=6$, $p=3$ экенин байкайбыз. Директрисанын теңдемеси $x=-\frac{p}{2}$ жана фокусунун координатасы $F(\frac{p}{2},0)$болгондуктан, параболанын директрисасынын теңдемеси $x=-\frac{3}{2}$, ал эми фокусунун координатасы $F(\frac{3}{2},0)$ болот.

5.6. Экинчи тартиптеги ийри сызыктардын жалпы теңдемеси

Декарттык координаталар системасында экинчи тартиптеги ийри сызыктардын жалпы теңдемеси төмөнкү көрүнүшкө ээ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

мында $A^2+B^2+C^2\neq 0$, б.а. үчөө бир учурда нөлгө барабар эмес (үчөөнүн жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу).

Экинчи тартиптеги ийрилердин теориясында (1) теңдеме төмөнкү 9 теңдемелердин бирөөнө келээри далилденген:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - Эллипс;

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - Гипербола;

3) $y^2=2px$ - Парабола;

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - Мнимый эллипс;

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - Кесилишүүчү эки түз сызык;

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ - Эки мнимый кесилишүүчү түз сызык;

7) $y^2-a^2=0$ - Параллель эки түз сызык;

8) $y^2+a^2=0$ - Эки мнимый параллель түз сызык;

9) $y^2=0$ - Дал келүүчү эки түз сызык,

мында $a, b, p=-\frac{D}{C}$ коэффициенттери нөлгө барабар эмес. 1-9 теңдемелери **каноникалык** түрдөгү теңдемелер деп аталат.

Практикада экинчи тартиптеги ийри сызыктар асман телолорунун кыймылынын траекторияларын үйрөнүүдө колдонулат: планеталар Күндүн айланасында эллипстик орбита боюнча кыймылдашат, Күн системасынын бардык кометалары же эллипс, же парабола, же гипербола боюнча кыймылдашат.

(1) теңдемени төмөнкү көрүнүштө да жазууга болот:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (8)$$

мында (1) теңдемедеги экинчи Bxy кошулуучусу жок. (8) теңдемени (1) теңдемеден координаталык окторду α бурчуна буруу аркылуу экинчи кошулуучу нөл боло тургандай өзгөртүп түзүүгө болот.

Координата окторун α бурчуна буруу формуласы

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \qquad (9)$$

көрүнүшкө ээ. Эски координаталарды жаңы координаталар аркылуу туюнтабыз, б.а. (9) формуланы (1) га коебуз:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$

$$+ C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) +$$

$$+ 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.$$

Мында $x' \cdot y'$ көбөйтүндүсүнүн коэффициенти нөл боло тургандай α бурчун тандап алабыз, б.а.

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

же

$$(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0 \qquad (10)$$

алабыз. Жөнөкөйлөтүп

$$tg\, 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \qquad (11)$$

формуласына келебиз.

Мына ошентип, (11) шартка баш ийген координата окторун α бурчуна бурууда (1) теңдеме (8) теңдемеге келтирилет.

Экинчи тартиптеги ийри сызыктардын (1) теңдемеси айрым учурларды эске албаганда негизинен тегиздикте айлана, эллипс, гипербола жана параболаны аныктайт.

Эгерде $A = C$ болсо, анда (11) теңдеме өз маанисин жоготот. (10) теңдемеден $\cos 2\alpha = 0$ алабыз, мындан $2\alpha = 90^0$ же $\alpha = 45^0$. Демек, $A = C$ болгондо, координаталар системасын 45^0 буруу керек.

Теорема. Эгерде (8) теңдеме

1) $A = C$ болсо, айлананы аныктайт
2) $A \cdot C > 0$ болсо, эллипсти аныктайт

3) $A\cdot C<0$ болсо, гиперболаны аныктайт

4) $A\cdot C=0$ болсо, параболаны аныктайт.

5-мисал. $4x^2+5y^2+20x-30y+10=0$ теңдемеси менен берилген ийри экинчи тартиптеги ийри сызыктын кайсы түрү экендигин аныктагыла.

Чыгаруу. Жогорудагы теореманын негизинде $A=4,\ C=5$ болгондуктан, $A\cdot C=20>0$ алабыз жана эллипсти аныктайт деп айтабыз. Берилген теңдемени төмөнкүдөй өзгөртүп түзөбүз:

$$4(x^2+5x+\frac{25}{4})+5(y^2-6y+9)-25-45+10=0,$$

$$4(x+\frac{5}{2})^2+5(y-3)^3=60,\ \frac{(x+\frac{5}{2})^2}{15}+\frac{(y-3)^3}{12}=1,$$

$$\frac{(x+\frac{5}{2})^2}{(\sqrt{15})^2}+\frac{(y-3)^2}{(\sqrt{12})^2}=1.$$

Борбору $O(-\frac{5}{2};3)$ чекитинде болгон, жарым октору $a=\sqrt{15},\ b=\sqrt{12}$ барабар болгон эллипстин каноникалык теңдемесин алдык.

6-мисал. $x^2+10x-2y+11=0$ теңдемеси менен берилген ийри экинчи тартиптеги ийри сызыктын кайсы түрү экендигин аныктагыла.

Чыгаруу. $A=1,\ C=0$ болгондуктан $A\cdot C=0$ - параболаны аныктайт. Чындыгында, $x^2+10x+25-2y+11-25=0,$

$(x+5)^2=2y+14,\ \ (x+5)^2=2(y+7)$ алабыз.

Чокусу $O(-5;-7)$ чекитинде жана $p=1$ ге барабар болгон параболанын каноникалык теңдемесин алдык.

7-мисал. $4x^2-y^2+8x-8y-12=0$ теңдемеси менен берилген ийри экинчи тартиптеги ийри сызыктын кайсы түрү экендигин аныктагыла.

Чыгаруу. $A=4,\ C=-1$ болгондуктан $A\cdot C=-4<0$ экен.

Теңдемени өзгөртүп түзөбүз

$4(x^2+2x+1)-(y^2+8y+16)-4+16-12=0,$

$4(x+1)^2-(y+4)^2=0,$

$(2(x+1)+(y+4))\cdot(2(x+1)-(y+4))=0,$

$(2x+y+6)(2x-y-2)=0$ теңдемесин алабыз. Бул теңдеме кесилүүчү эки түз сызыктарды аныктайт: $2x+y+6=0$ жана $2x-y-2=0$.

6-ГЛАВА. СЫЗЫКТУУ АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

6.1. Матрицалар. Негизги түшүнүктөр

Матрица *деп элементтери m жолчолордон жана n мамычалардан турган тик бурчтуу таблицаны айтабыз:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицаны кыскача $A=(a_{ij})$ деп жазабыз, мында a_{ij} матрицанын элементтери, $i=1,...,m$ - жолчолордун номери, ал эми $j=1,...,n$ - мамычаларынын номери болуп эсептелет.

Жолчолорунун саны m, мамычаларынын саны n болгон A матрицасын $m\times n$ өлчөмүндөгү тик бурчтуу матрица деп атайбыз жана аны $A_{m\times n}$ аркылуу белгилейбиз.

*Эгерде матрицанын жолчолорунун саны менен мамычаларынын саны барабар болсо, анда аны **квадраттык** матрица деп атайбыз. Өлчөмү $n\times n$ болгон квадраттык матрицаны $n-$**тартиптеги** квадраттык матрица деп атайбыз.*

*Эгерде A жана B матрицаларынын тиешелүү элементтери барабар болушса, б.а. $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$, анда мындай матрицаларды өз ара **барабар** деп атайбыз жана $A=B$ деп жазабыз.*

*Квадраттык матрицанын a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... ,a_{nn} элементтери анын **башкы диагоналын** түзүшөт.*

*Эгерде квадраттык матрицада башкы диагоналдык элементтеринен башка бардык элементтери нөлгө барабар болсо, анда мындай матрицаны **диагоналдык матрица** деп атайбыз.*

*Эгерде диагоналдык матрицанын башкы диагоналынын элементтеринин ар бири бирге барабар болсо, анда ал **бирдик матрица** деп аталат.*

Мисал. $E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

$E_{3\times 3}$ - 3 тартиптеги бирдик матрица, ал эми $E_{n\times n}$- $n-$тартиптеги бирдик матрица.

*Эгерде квадраттык матрицанын башкы диагоналдык элементтеринин бир жагындагы элементтеринин баары нөлгө барабар болсо, анда аны **үч бурчтук көрүнүшүндөгү** матрица деп атайбыз.*

*Бардык элементтери нөлгө барабар матрица **нөлдүк матрица** деп аталат жана*

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

аркылуу белгиленет.

Бир гана жолчодон турган матрицаны вектор-жолчо, ал эми бир гана мамычадан турган матрицаны вектор-мамыча деп атайбыз:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots,\ b_n).$$

1×1 өлчөмүндөгү бир сандан турган матрица ал сан менен теңдештирилет, б.а. $(7)_{1\times 1} = 7$.

Матрицанын жолчолору менен мамычаларынын орундарын алмаштыруудан пайда болгон матрицаны **транспонирленген** матрица деп атайбыз жана ал A^T аркылуу белгиленет.

Мисалы,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ болсо, анда } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

болот.

Мисал. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad A^T=(1\ \ 0).$$

Матрицаларды транспонирлөө төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

1°. $(A^T)^T=A$;

2°. $(A+B)^T=A^T+B^T$;

3°. $(AB)^T=B^T\cdot A^T$.

6.2. Матрицаларды кошуу

Жөнөкөйлүк үчүн матрицалардын үстүндөгү амалдарды экинчи жана үчүнчү тартиптеги матрицалар аркылуу баяндайбыз.

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *жана* $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *квадраттык матрицаларынын суммасы деп*

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

матрицасы аталат.

1-*мисал.* $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 5+0 \\ 3+4 & 8+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Ушул сыяктуу эле тик бурчтуу матрицалардын суммасын аныктоого болот. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ *жана* $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ *матрицаларынын суммасы деп*

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix} \tag{2}$$

матрицасы аталат.

2-*мисал.* $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7+2 & 0+1 & 5+0 \\ 3+4 & 8+2 & 2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

3-*мисал.* $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Матрицаларды кошуу сыяктуу эле алардын айырмасын да табууга болот. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *жана* $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *квадраттык матрицаларынын* ***айырмасы*** *деп*

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$$

матрицасы аталат.

4-мисал. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & 5-0 \\ 3-4 & 8-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

6.3. Матрицаны санга көбөйтүү

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *матрицасынын* λ *санына болгон* ***көбөйтүндүсү*** *деп, A матрицасынын бардык элементтерин* λ *санына көбөйтүү менен алынган матрицаны айтабыз:* $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$.

Ушул сыяктуу эле матрицаларды санга көбөйтүү үчүнчү тартиптеги квадраттык жана тик бурчтуу матрицалар үчүн да аткарылат. Матрицага санды сол жагынан да, оң жагынан да көбөйтүү бир эле жыйынтыкты берет: $A\lambda=\lambda A$.

Мисал. $A\lambda=\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix}$.

Матрицаны нөлгө көбөйтүүдө нөлдүк матрица келип чыгат.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицаларды кошуу жана санга көбөйтүү төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

1°. $A+B=B+A;$	5°. $1\cdot A=A;$
2°. $(A+B)+C=A+(B+C);$	6°. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B;$
3°. $A+O=A;$	7°. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A;$
4°. $A-A=O;$	8°. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A,$

мында A, B, C - матрицалар, $\alpha,\ \beta$ - сандар.

6.4. Матрицаларды кобойтүү

Матрицаларды көбөйтүү биринчи матрицанын мамычаларынын саны менен экинчи матрицанын жолчолорунун саны барабар болгон учурда гана аткарса болот.

Квадраттык матрицаларды көбөйтүүнү карайлы. Бизге $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ жана $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ матрицалары берилсин.

A жана B матрицаларынын көбөйтүндүсү деп, элементтери төмөнкүдөй аныкталган үчүнчү бир матрицаны айтабыз:

$$A \cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

5-мисал.

$$A \cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

6-мисал.

$$B \cdot A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4 \\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

5- жана 6-мисалдардан матрицаларды көбөйтүүнүн коммутативдик касиетинин аткарылбай тургандыгы келип чыгат, б.а. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Матрицаларды көбөйтүүдө E **бирдик матрицасы** өзгөчө мааниге ээ.

Бирдик матрица деп, бардык диагоналдык элементтери 1ге барабар болгон матрицаны айтабыз: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Каалаган квадраттык A матрицасын бирдик матрицага көбөйткөндө кайра эле A матрицасы пайда болот, б.а.

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Эми $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ жана $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ матрицаларынын көбөйтүндүсү төмөнкүдөй аныкталат:

$$A \cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

7-мисал. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 3+1\cdot 1 & 2\cdot 2+3\cdot 4+1\cdot 5 & 2\cdot 0+3\cdot 1+1\cdot 2 \\ 1\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 4+0\cdot 5 & 1\cdot 0+2\cdot 1+0\cdot 2 \\ 4\cdot 1+1\cdot 3+5\cdot 1 & 4\cdot 2+1\cdot 4+5\cdot 5 & 4\cdot 0+1\cdot 1+5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 5 \\ 7 & 10 & 2 \\ 12 & 37 & 11 \end{pmatrix}.$$

8-мисал.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot 6 & 2\cdot 3+1\cdot 0+3\cdot 7 \\ 1\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 6 & 1\cdot 3+4\cdot 0+5\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 27 \\ 39 & 38 \end{pmatrix}.$$

Квадраттык матрицаны вектор-мамычага көбөйтүү төмөнкү эреже боюнча жүрөт:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

9-мисал.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-4)+(-2)\cdot 5 \\ 1\cdot(-4)+\ \ 6\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Матрицаны матрицага көбөйтүү төмөндөгү касиеттерге ээ:

1°. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C;$

2°. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C;$

3°. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C;$

4°. $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B.$

6.5. Матрицаларды элементардык өзгөртүп түзүү

Матрицаларды элементардык өзгөртүп түзүү деп төмөнкү өзгөртүп түзүүлөрдү айтабыз:

- *Матрицанын эки параллель жолчолорунун же мамычаларынын орундарын алмаштыруу;*
- *Матрицанын жолчосунун же мамычасынын бардык элементтерине нөлдү көбөйтүү;*
- *Матрицанын бир жолчосуна же мамычасына бир эле санга көбөйтүлгөн жолчону же мамычаны кошуу.*

Эгерде A жана B матрицаларынын бири экинчисинен элементардык өзгөртүп түзүүлөр аркылуу пайда болсо, анда аларды ***эквиваленттүү*** *матрицалар деп атайбыз жана $A \sim B$ аркылуу белгилейбиз.*

Элементардык өзгөртүп түзүүлөр аркылуу каалаган матрицанын башкы диагоналынын бир канча элементтерин бир кылып, ал эми калган элементтерин нөл кылууга болот. Мындай матрицаны **каноникалык матрица** деп айтабыз.

Мисалы, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.6. Аныктагычтар. Экинчи тартиптеги аныктагычтар

Бизге $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ квадраттык матрицасы берилсин.

$a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ *саны экинчи тартиптеги матрицанын аныктагычы же* ***экинчи тартиптеги аныктагыч*** *деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ же } det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Мында *det* деген сөз детерминант (аныктагыч) дегенди билдирет.

Мына ошентип, аныктама боюнча

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \qquad (1)$$

болот.

1-мисал. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ матрицасынын аныктагычын эсептегиле.

Чыгаруу. (1) формулага ылайык

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-1) = -6 - 4 = -10 .$$

2-мисал. $\begin{vmatrix} cos\,\alpha & (-sin\,\alpha) \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{vmatrix}$ аныктагычынын маанисин тапкыла.

Чыгаруу.

$$\begin{vmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{vmatrix} = cos\,\alpha \cdot cos\,\alpha - (-sin\,\alpha) \cdot sin\,\alpha = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$$ алабыз.

3-мисал. $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Аныктама боюнча

$\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (x-4) = 6 - x + 4 = 10 - x$ болгондуктан $10 - x = 0$ болот. Мындан, $x = 10$.

Эгерде квадраттык матрицанын аныктагычы нөлдөн айырмалуу болсо, анда аны ***кубулбаган матрица*** *деп,* ***ал эми*** *нөлгө барабар болсо –* ***кубулган матрица*** *деп айтабыз.*

Мисалы, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ матрицасы кубулган, себеби анын аныктагычы $\det A = 0$, ал эми $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ матрицасы кубулбаган, анткени $\det B = -2 \neq 0$.

Эки бирдей тартиптеги матрицалардын көбөйтүндүсүнүн аныктагычы алардын аныктагычтарынын көбөйтүндүсүнө барабар, б.а.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Мисал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ жана $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ матрицалары берилсин. A матрицасын B матрицасына көбөйтөлү:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 11 & 24 \end{pmatrix},$$

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 11 & 24 \end{vmatrix} = 120 - 110 = 10.$$

Эми A жана B матрицаларынын аныктагычтарын табабыз: $\det A = 1$, $\det B = 10$, $\det(A \cdot B) = 10$.

6.7. Үчүнчү тартиптеги аныктагычтар

Бизге үчүнчү тартиптеги матрица берилсин:

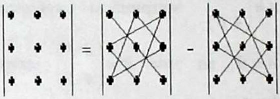
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Үчүнчү тартиптеги матрицанын аныктагычы төмөнкү формула боюнча аныктайбыз:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \tag{3}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}\,a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Аныктагычтарды (3) формуланын жардамы менен эсептөө ***үч бурчтуктар эрежеси*** же ***Саррюстун эрежеси*** деп аталып, схемалык түрдө төмөнкүдөй көрсөтүүгө болот:



4-мисал. Үчүнчү тартиптеги аныктагычты эсептегиле.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Чыгаруу. $\det A = 1\cdot(-5)\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot(-7) + 4\cdot 8\cdot 3 - (-7)\cdot(-5)\cdot 3 -$
$- 4\cdot 2\cdot 9 - 8\cdot 6\cdot 1 = -45 - 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = -258$.

Аныктагычтардын эсептөөнүн экинчи методун элементтин минору жана алгебралык толуктоочу түшүнүктөрүн берүүдөн кийин көрсөтөбүз.

6.8. Аныктагычтардын касиеттери

1°. Эгерде аныктагычтын жолчолору менен мамычаларынын орундарын алмаштырсак, анда аныктагычтын мааниси өзгөрбөйт, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аныктагычтын жолчолору менен мамычаларынын орундарын алмаштыруу аны **транспонирлөө** деп аталат.

2°. Аныктагычтын каалаган эки жолчосунун (мамычасынын) орундарын алмаштыруу аны (-1)ге көбөйткөнгө барабар, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3°. Эгерде аныктагычтын каалаган эки жолчосу (мамычасы) барабар болсо, анда анын мааниси нөлгө барабар, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4°. Аныктагычтын каалаган жолчосунун (мамычасынын) ар бир элементин k санына көбөйтүү, аныктагычтын өзүн бул санга көбөйткөнгө барабар, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5°. Аныктагычтын кандайдыр бир жолчосунун (мамычасынын) бардык элементтери нөлгө барабар болсо, анда аныктагычтын мааниси нөлгө барабар, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6°. Аныктагычтын каалаган эки жолчосу (мамычасы) пропорционалдуу болсо, анда аныктагычтын мааниси нөлгө барабар, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7°. Аныктагычтын кандайдыр бир жолчосу (мамычасы) эки кошулуучунун суммалары түрүндө болсо, анда ал аныктагычты эки аныктагычтын суммасы түрүндө ажыратууга болот, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

8°. Аныктагычтын кандайдыр бир жолчосуна (мамычасына) k санына көбөйтүлгөн башка бир жолчосу (мамычасы) кошулса, анда аныктагычтын мааниси өзгөрбөйт, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{32} \end{vmatrix}.$$

n-тартиптеги аныктагычтын a_{ij} **элементинин минору** деп, ошол элемент турган жолчону жана мамычаны сызып таштоодон пайда болгон $n-1$ - тартиптеги аныктагыч аталат жана ал M_{ij} аркылуу белгиленет.

Мисалы, үчүнчү тартиптеги аныктагычтын a_{11} элементинин минору экинчи тартиптеги $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ аныктагычы болот, ал эми a_{23} элементинин минору экинчи тартиптеги $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ аныктагычы болот.

n-тартиптеги аныктагычтын a_{ij} ***элементинин алгебралык толуктоочусу*** *деп $i+j$ суммасы жуп болсо плюс, ал эми $i+j$ суммасы так болсо минус белгиси менен алынган анын минору аталат жана $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ деп белгиленет.*

Жогорудагы a_{11} жана a_{23} элементтеринин алгебралык толуктоочулары $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$ болот.

9°. Аныктагыч өзүнүн кандайдыр бир жолчосунун (мамычасынын) элементтери менен аларга тиешелүү алгебралык толуктоочуларынын көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Бул касиет үчүнчү тартиптеги аныктагычты эсептөөнүн **2-методу болуп эсептелет.** Чындыгында эле аныктагычты биринчи жолчосунун элементтери боюнча ажыратсак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\left[(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right] + a_{12}\left[(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right] + a_{13}\left[(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right] =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}) + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

формуласын алабыз. Бул барабардыкты жөнөкөйлөтүп (3) формулага келебиз.

Мына ошентип, үчүнчү тартиптеги аныктагычты биринчи жолчосу боюнча ажыратуу менен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

формуласын алабыз.

Эскертүү. Аныктагычты эсептөө үчүн анын каалаган жолчолору же мамычалары боюнча ажыратуу жолу менен эсептесе да болот. Бул жол менен эсептөөдө нөлдөр катышкан жолчолорду же мамычаларды тандап алуу ыңгайлуу.

5-мисал. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ үчүнчү тартиптеги аныктагычты (4) формуланы колдонуп эсептегиле.

Чыгаруу. Бул аныктагычты үчүнчү жолчосу боюнча ажыраталы, себеби ал жолчодо нөл саны катышып жатат. Анда

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 8(21+24) - 0 + 3(12-15) =$$

$= 8 \cdot 45 - 0 + 3 \cdot (-3) = 360 - 9 = 351$ алабыз.

6.9. Жогорку тартиптеги аныктагычтарды эсептөө

2- жана 3- тартиптеги аныктагычтарды эсептөөдөн сырткары көпчүлүк маселелерде жогорку тартиптеги аныктагычтарды эсептөөгө туура келет. Мисалы, 4-тартиптеги аныктагыч

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

(4) формула сыяктуу эле эсептелет, б.а. ***жолчосу же мамычасы боюнча ажыратуу*** аркылуу үчүнчү тартиптеги аныктагычтарды эсептөөгө алып келинет:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{14}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Демек, 9^0-касиетти пайдаланып, аныктагычты элементтеринин алгебралык толуктоочулары аркылуу төмөнкүдөй да жазса болот:

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}.$$

6-мисал. Төртүнчү тартиптеги аныктагычты эсептегиле

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Чыгаруу. Биринчи жолчосу боюнча ажыратабыз, себеби анда эки элементи нөлгө барабар:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Экинчи жана төртүнчү кошулуучулардын мааниси нөл экени көрүнүп турат, ошондуктан биринчи жана үчүнчү кошулуучуларды эсептөө жетиштүү. Биринчи кошулуучуну үчүнчү жолчосу боюнча ажыратабыз:

$$3\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 3(2\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}) = 3(2(-3+8) - 0 + (-6+4)) = 24.$$

Эми үчүнчү кошулуучуну биринчи мамыча боюнча ажыратабыз:

$$2\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix} = 2(2\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}) = 2(2(4-6) - 0 + 5(9-16)) = -78.$$

Анда $\Delta = 24 - 78 = -54$ алабыз.

Мына ушул сыяктуу эле n- тартиптеги аныктагычтар да эсептелет:

$$A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

6.10. Сызыктуу теңдемелер системасын аныктагычтардын жардамында чыгаруу

Үч өзгөрмөлүү теңдемелер системасын карайлы:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1,\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2,\\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) системанын коэффициенттеринен турган матрица **системанын матрицасы** деп аталат жана ал

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

көрүнүшүндө болот. (1) системанын оң жагындагы сандар бош мүчөлөрдүн мамыча-векторун түзөт: $B = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$.

Жалпы учурда система бир чечимге, чексиз көп чечимге же эч бир чечимге ээ болбой калышы мүмкүн.

Жок дегенде бир чечимге ээ болгон система ***биргелешкен*** *деп аталат, ал эми бир да чечимге ээ болбогон система* ***биргелешпеген*** *система деп аталат.*

Жалгыз гана чечимге ээ болгон биргелешкен система ***аныкталган*** *деп аталат. Бир нече чечимге ээ болгон биргелешкен система* ***аныкталбаган*** *деп аталат.*

Аныкталбаган системадагы чечимдердин ар бири системанын ***жекече чечими*** *деп аталат. Бардык жекече чечимдердин жыйындысы* ***жалпы чечимди*** *түзөт.*

Эгерде системанын аныктагычы нөлдөн айырмалуу болсо, анда ал системаны ***кубулбаган*** *система деп атайбыз.*

Системаны чыгаруу – анын бергелешкен же биргелешпеген экенин аныктоо. Эгер биргелешкен болсо, анда жалгыз чечимин же жалпы чечимин табуу керек.

Эки система **эквиваленттүү** (тең күчтүү) деп аталат, эгерде алар бирдей жалпы чечимге ээ болсо, б.а. биринчи системанын ар бир чечими экинчи системанын чечими болсо жана тескерисинче.

Сызыктуу теңдемелер системасы **бир тектүү** деп аталат, эгер анын бош мүчөлөрү нөлгө барабар болсо, б.а. (1) системада $b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0$ болсо.

Бир тектүү система дайыма биргелешкен болот, себеби $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ нөлдүк (**тривиалдык**) чечими дайым жашайт.

Системанын матрицасынын элементтеринен түзүлгөн аныктагычты карайлы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Теорема. *(1) теңдемелер системанын матрицасынын аныктагычы нөлдөн айырмалуу болгондо гана система жалгыз чечимге ээ болот.*

Бул учурда Крамердин эрежесин пайдаланууга болот: эгерде $\Delta \neq 0$ жана

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

болсо, анда (1) системанын чечими

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad (4)$$

формулалары боюнча табылат. (4) формула Крамердин формулалары деп аталат.

1-мисал. Теңдемелер системасын чагаргыла $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

Чыгаруу. Системанын аныктагычын эсептеп чыгабыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29 \neq 0.$$

Демек, система биргелешкен жана ага Крамердин эрежесин пайдалансак болот, б.а. (4) формулаларды колдонобуз. Ал үчүн (3) аныктагычтарды эсептеп чыгарышыбыз керек:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -87, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -145.$$

Анда $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-29}{-29} = 1, \quad y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-87}{-29} = 3, \quad z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-145}{-29} = 5$

жалгыз чечимине ээ болобуз, б.а. система биргелешкен жана аныкталган.

Эми бир тектүү теңдемелер системасын карайбыз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Бир тектүү теңдемелер системасы дайыма $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$ тривиалдык чечимине ээ экени көрүнүп турат. Эгерде бир тектүү системанын аныктагычы $\Delta \neq 0$ нөлдөн айырмалуу болсо, анда тривиалдык чечим жалгыз гана чечим болот.

Бир тектүү теңдемелер системасынын аныктагычы $\Delta = 0$ нөл болгондо гана ага тиешелеш бир тектүү эмес система тривиалдык (нөлдүк) эмес чечимге ээ болот жана анын чексиз көп чечимдери жашайт.

2-мисал. Теңдемелер системасынын бардык чечимдерин тапкыла

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$$

Чыгаруу. Системанын аныктагычы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 7 & 3\end{vmatrix}=12-6-7+12+3-14=0.$$

Демек, Крамердин эрежесин пайдаланууга болбойт жана ал чексиз көп тривиалдык эмес чечимдерге ээ. Экинчи теңдемени 2 ге көбөйтүп биринчи теңдемеге кошсок үчүнчү теңдеме пайда болот экен, б.а. аны биринчи экөөнүн жыйынтыгы катары таштап койсок да болот. Анда $\begin{cases}x-y=z,\\ x+4y=-2z.\end{cases}$ системасын чыгаруу жетиштүү. $z=t$ (t каалагандай сан) белгилөөсүн жүргүзүп $y=-\frac{3}{5}t,\ x=\frac{2}{5}t$ оңой эле табабыз.

Мына ошентип, берилген системанын бардык чечимдерин $x=\frac{2}{5}t\ \ y=-\frac{3}{5}t,\ z=t$ түрүндө жазууга болот. $t=0$ болгон учурда тривиалдык чечимди алабыз.

6.11. Тескери матрица жөнүндө түшүнүк

Бизге A квадраттык матрицасы берилсин.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

А матрицасынын элементтеринин алгебралык толуктоочуларынан түзүлгөн

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

матрицасын ***союздук матрица*** *деп айтабыз.*

Мында A_{ij} - a_{ij} элементтеринин алгебралык толуктоочулары.

Эскертүү. *Мында A^{*} матрицасынын элементтери транспонирленген, б.а. жолчолору менен мамычаларынын орундары алмаштырылган.*

А квадраттык матрицасына ***тескери матрица*** *деп,*

$$A \cdot A^{-1} = E \tag{1}$$

шартын канааттандырган матрицаны айтабыз жана аны A^{-1} *аркылуу белгилейбиз.*

Эгерде (1) формула аткарылса, анда

$$A^{-1} \cdot A = E \tag{2}$$

аткарылаарын көрсөтүүгө болот.

Теорема. *A квадраттык матрицасынын тескери матрицасы жашашы үчүн анын кубулбаган (б.а. матрицанын аныктагычы нөлдөн айырмалуу) болушу зарыл жана жетиштүү.*

A матрицасына тескери матрица төмөнкү формула менен аныкталат:

$$A^{-1} = \frac{A^{*}}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \ldots A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(3) формула ***тескери матрицаны*** *табуу формуласы болуп эсептелет.*

Үчүнчү тартиптеги квадраттык матрица үчүн тескери матрицаны табуу формуласы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

көрүнүшүндө болот.

Тескери матрицанын касиеттери:

1°. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;

2°. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3°. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$.

1-мисал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасына тескери A^{-1} матрицаны тапкыла.

Чыгаруу. *A* матрицасынын аныктагычы $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Демек, тескери матрица жашайт. Анда A^{*} союздук матрицаны табыш үчүн алгебралык толуктоочуларды табалы: $A_{11} = 1,\ A_{12} = 1,\ A_{21} = -3,\ A_{22} = 2$. Бул маанилерди (4) формулага коюп, тескери матрицаны табабыз:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Текшерүү:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

(1) шарт аткарылды, демек тескери матрица туура табылган.

2-мисал. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ матрицасына тескери матрицаны тапкыла.

Чыгаруу. A матрицасынын аныктагычын табабыз:

$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=12+3+3-2-6-9=1\neq 0$. Демек матрица кубулбаган, анда тескери матрица жашайт. Союздук матрицаны түзөбүз:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=3,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,$$

$A^{*}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Анда $A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ болот.

Текшерүү:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

6.12. Матрицанын рангы

Төмөнкү $m\times n$ өлчөмүндөгү матрицаны карайлы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

Матрицанын **рангын** табууда матрица квадраттык болушу шарт эмес. Ушул матрицада k жолчосун жана k мамычасын белгилейбиз. Жолчолордун жана мамычалардын кесилишиндеги элементтерден k-тартиптеги аныктагычты түзөбүз (б.а. k жолчолуу, k мамычалуу аныктагыч). Мында $k\le min(m;n)$ болушу керек. Мүмкүн болгон бардык ушул сыяктуу аныктагычтар **матрицанын минорлору** деп аталат.

Бардык минорлордун саны $C_m^k\cdot C_n^k$ $(C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!})$ - n элементтен k дан болгон топтоштурууларды түзөт.

Матрицанын нөлдөн айырмалуу болгон минорлорунун эң чоң тартиби ***матрицанын рангы*** *деп аталат.*

Матрицанын рангы r, $r(A)$ же $rang\,A$ аркылуу белгиленет. Матрицанын рангы $0\le r(A)\le min(m;n)$ болот.

Матрицанын рангын аныктаган минор ***базистик*** *деп аталат.* Матрицада бир канча базистик минорлор болушу мүмкүн.

1-мисал. Матрицанын рангын тапкыла

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чыгаруу. Мында $m=3,\ n=4$. Демек $k=3\le min(3;4)$ барабар. Анда үчүнчү тартиптеги нөлдөн айырмалуу минорлорду эсептеп чыгышыбыз керек:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0,$$ б.а. үчүнчү

тартиптеги минорлордун баары нөлгө барабар экен. Эми экинчи тартиптеги минорлорду эсептейли:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-10, \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-15, ...$$ баары

биригип 18 экинчи тартиптеги минорлор бар. Мына ошентип, нөлдөн айырмалуу болгон минорлордун эң чоң тартиби 2 ге барабар экен. Демек, матрицанын рангы $r=2$ болот.

2-мисал. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ матрицасынын рангын тапкыла.

Чыгаруу. Мында $m=n=3$, анда $k=3$ болот. A матрицасынын аныктагычы жогоруда белгилүү болгондой $A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=1\neq 0$ барабар. Демек, матрицанын эң чоң минорунун тартиби 3 болот. Анда $rang\, A=3$.

Матрицанын рангынын касиеттери

1°. Матрицаны транспонирлөөдө анын рангы өзгөрбөйт.

2°. Эгерде матрицанын нөлдүк жолчосун же нөлдүк мамычасын сызып таштасак, анда матрицанын рангы өзгөрбөйт.

3°. Матрицаны элементардык өзгөртүп түзүүдө анын рангы өзгөрбөйт.

Каноникалык матрицанын рангы матрицанын башкы диагоналындагы бирлердин санына барабар. Мына ушул эреже менен да матрицанын рангын табууга болот.

Мисал. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасы элементардык өзгөртүп түзүүлөр аркылуу төмөнкү каноникалык түргө келтирилет

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б.а.} \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ ошондуктан берилген матрицанын рангы $r(A) = 2$ барабар.

6.13. Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу. Кронекер-Капеллинин теоремасы

Бизге n белгисиздүү m теңдемелер системасы берилсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Мындай системаны матрицалык формада

$$A \cdot X = B$$

деп жазуу ыңгайлуу, мында

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A **- негизги матрица,** X - белгисиздерден түзүлгөн **вектор-мамыча**, B - бош мүчөлөрдөн түзүлгөн **вектор-мамыча** деп аталат.

A жана B матрицаларынын элементтеринен түзүлгөн

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ матрицасы **кеңейтилген матрица** деп аталат.

(1) теңдемелер системасынын биргелешкендиги жөнүндө **Кронекер-Капеллинин** теоремасы толук маалымат берет.

1-теорема. (1) теңдемелер системасынын кеңейтилген матрицасынын рангы негизги матрицанын рангына барабар болгондо гана сызыктуу алгебралык теңдемелер системасы биргелешкен болот.

Практикада биргелешкен системанын бардык чечимдерин табуу эрежеси төмөнкү теоремалардан келип чыгат.

2-теорема. ***Эгерде биргелешкен системанын рангы белгисиздердин санына барабар болсо, анда система жалгыз чечимге ээ.***

3-теорема. ***Эгерде биргелешкен системанын рангы белгисиздердин санынан кичине болсо, анда система чексиз көп чечимге ээ.***

Каалаган сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу эрежелери:

1). Кеңейтилген жана негизги матрицанын рангдарын табуу керек. Эгерде $r(A) \neq r(\overline{A})$ болсо, анда система биргелешпеген болот.

2). Эгерде $r(A) = r(\overline{A}) = r$ болсо, анда система биргелешкен болот. Матрицанын рангын аныктаган кандайдыр бир r-тартиптеги минорду табуу, б.а. базистик минорду табуу керек. Коэффициенттери базистик минорду түзгөн r теңдемени алабыз (калганын таштап жиберебиз). Коэффициенттери базистик минорду түзгөн белгисиздерди **башкы** деп атайбыз жана аларды сол жакта калтырабыз, ал эми калган $n-r$ белгисиздерди **эркин** деп атайбыз жана аларды теңдемелердин оң жагына алып өтөбүз.

3). Башкы белгисиздерди эркин белгисиздер аркылуу туюнтуу керек. Системанын жалпы чечими алынды.

4). Эркин белгисиздерге ар түрдүү маани берип отуруп, башкы белгисиздердин тиешелүү маанилерин алабыз. Мына ошентип, берилген теңдемелер системасынын жекече чечимдерин табабыз.

1-мисал. $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = -2 \end{cases}$ системасы биргелешкенби же биргелешкен эмеспи?

Чыгаруу. Негизги матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $r(A) = 1$. Кеңейтилген матрица $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$. Негизги жана кеңейтилген матрицанын рангдары барабар эмес, б.а. $r(A) \neq r(\overline{A})$. Анда система биргелешкен эмес.

2-мисал. Системаны чыгаргыла

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Чыгаруу. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ негизги матрицасынын бардык үчүнчү тартиптеги минорлору нөлгө барабар. Ал эми экинчи тартиптеги минорлорунун бири нөлгө барабар эмес, мисалы $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0$, демек $r(A)=2$.

$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ кеңейтилген матрицасынын да бардык үчүнчү тартиптеги минорлору нөлгө барабар. Ал эми экинчи тартиптеги минорлорунун бири, мисалы $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, анда $r(\overline{A})=2$.

Жогорудагы 1-теорема боюнча бул система биргелешкен, бирок чексиз көп чечимге ээ. Себеби 3-теореманын шарты аткарылып жатат, б.а. матрицанын рангы белгисиздердин санынан кичине.

Биринчи эки теңдемени алабыз (үчүнчүсү биринчи экөөнөн келип чыгат):

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1. \end{cases}$$

$x_3,\ x_4$ коэффициенттеринен түзүлгөн минорду карайбыз, б.а.

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$

$x_3,\ x_4$ **башкы** белгисиздерин калтырып, **эркин** белгисиздерди оң жакка алып өтөбүз:

$$\begin{cases} x_3+x_4=1-x_1+2x_2, \\ x_3-x_4=-1-x_1+2x_2. \end{cases}$$

Крамердин эрежесин колдонуп

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1-x_1+2x_2 & 1 \\ -1-x_1+2x_2 & -1 \end{vmatrix}=2x_1-4x_2, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1-x_1+2x_2 \\ 1 & -1-x_1+2x_2 \end{vmatrix}=-2$$

алабыз. Анда $x_3=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-x_1+2x_2\ \ x_4=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=1$ жалпы чечимине ээ болобуз. Эми мисалы, $x_1=0,\ \ x_2=0$ деп, жекече чечимдеринин бирин алабыз: $x_1=0,\ \ x_2=0,\ \ x_3=0,\ \ x_4=1.$

(1) теңдемелер системасы бир тектүү деп аталат, эгерде анын бардык бош мүчөлөрү нөлгө барабар болсо, б.а.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Бир тектүү система дайыма биргелешкен болот, себеби $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ тривиалдык (нөлдүк) чечимине ээ.

Кандай шарттарда (2) көрүнүшүндөгү бир тектүү системасы тривиалдык (нөлдүк) эмес чечимдерге да ээ болот?

4-теорема. *(2) теңдемелер системасы тривиалдык эмес чечимдерге ээ болушу үчүн негизги матрицанын рангы r, анын белгисиздеринин санынан кичине болушу зарыл жана жетиштүү, б.а. $r < n$.*

3-мисал. Системаны чыгаргыла $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

Чыгаруу. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$ ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$), $n = 3$.

$r < n$ болгондуктан система чексиз көп чечимдерге ээ. Ал чечимдерди табалы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3,\quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2x_3,\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3x_3.$$

x_3 белгисизине ар түрдүү маанилерди берип системанын тривиалдык эмес чечимдерин табабыз: мисалы, $x_3 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3;$
$x_3 = 2,\ x_1 = 4,\ x_2 = 6$ ж.б.

Мейли бизге n белгисиздүү n теңдемелер системасы берилсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Анда (3) система үчүн төмөндөгү теорема орун алат.

5-теорема. *n белгисиздүү бир тектүү n теңдемелер системасы тривиалдык эмес чечимдерге ээ болушу үчүн, анын аныктагычынын нөлгө барабар болушу зарыл жана жетиштүү.*

3-БӨЛҮМ. МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗДИН НЕГИЗДЕРИ

7-ГЛАВА. ФУНКЦИЯЛАР

7.1. Функция жөнүндө түшүнүк

Функция түшүнүгү негизги математикалык түшүнүктөрдүн бири болуп эсептелет. Функция түшүнүгү эки көптүктүн ортосундагы көз карандылыкты (байланышты) көрсөтөт.

Мисалы, жагы 3 кө барабар болгон туура көп бурчтуктарды X көптүгү жана алардын периметрлерин Y көптүгү деп белгилейли. Мында ар бир көп бурчтукка белгилүү санды - анын периметрин тиешелештикке койсок болот: X көптүгүнөн алынган үч бурчтукка - 9 санын, төрт бурчтукка - 12 санын, алты бурчтукка - 18 санын тиешелештикке койсо болот, ж.б. Бул учурда X жана Y көптүктөрүнүн элементтеринин ортосунда функционалдык көз карандылык эрежеси (закону) орнотулду деп айтсак болот, б.а. ар бир туура көп бурчтукка сан – анын периметри тиешелештикке коюлат.

Бизге бош эмес X жана Y көптүктөрү берилсин.

Эгерде f эрежесинин негизинде X көптүгүнүн ар бир x элементине Y көптүгүнүн анык бир y элементи тиешелештикке коюлса, анда бул тиешелештик ***функция*** *деп аталат жана*

$$y = f(x) \tag{1}$$

түрүндө белгиленет.

Мында x - көз каранды эмес өзгөрмө же ***функциянын аргументи****, ал эми y - көз каранды өзгөрмө же* ***функциянын мааниси*** *деп аталат. X көптүгү - функциянын* ***аныкталуу областы****, ал эми Y көптүгү - функциянын* ***маанилеринин областы*** *деп аталат.*

$y = f(x)$ барабардыгы "игрек барабар эф от икс" деп окулат. Функция X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтат деп айтууга да болот жана аны $f : X \to Y$ деп жазабыз.

Эгерде X көптүгүнүн ар бир x элементине тиешелүү түрдө Y көптүгүнүн анык бир гана y элементи тиешелештикке коюлса, анда функция ***бир маанилүү*** *деп аталат.*

Эгерде X көптүгүнүн ар бир x элементине тиешелүү түрдө Y көптүгүнүн бир канча элементтери тиешелештикке коюлса, анда функция ***көп маанилүү*** *деп аталат.*

7.2. Функциянын берилиш жолдору

1. Аналитикалык жол. *Эгерде функция бир же бир нече формуланын же теңдеменин жардамы менен аныкталса, анда функцияны аналитикалык жол менен берилди деп айтабыз.* Мисалы,

1). $y = x^3 - 2x$; 2). $y = \begin{cases} x^2 + 1, x < 2, \\ x - 4, \; x \geq 2; \end{cases}$ 3). $y^2 - 4x = 0$; 4). $S = \pi R^2$.

2. Графиктик жол. Функцияны аналитикалык түрдө берүүгө кыйын болгон учурда графиктик жолду пайдаланса болот. *Эгерде x жана y өзгөрмөлөрүнүн арасындагы көз карандылык $y = f(x)$ шартын канааттандыруучу чекиттердин көптүгү (жыйындысы) катарында берилсе, анда функцияны графиктик жол менен берилген деп айтабыз.*

$y = f(x)$ функциянын графиги деп $(x, f(x))$ чекиттеринин көптүгүн айтабыз.

Функциянын графиги көпчүлүк учурда ийри сызык же бет түрүндө болот. Мисалы, $y = x^3$ - кубдук параболаны, $x^2 + y^2 = 1$ - айланы, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ - сфераны аныктайт, ж.б.у.с.

Көп реалдуу процесстерди үйрөнүүдө приборлордун жардамында алынган ийри сызык изилденип жаткан функция жөнүндө жетишээрлик маалыматты алууга мүмкүнчүлүк түзөт. Мисалы, осциллографтын көрсөткүчү, медицинада жүрөктүн иштешин мүнөздөөчү электрокардиограмма, ж.б. Азыркы мезгилде функциялардын графигин **MathCad, Maple** ж.б.у.с. сыяктуу математикалык пакеттердин жардамы менен жеңил эле тургузууга болот.

3. Таблицалык жол. *Эгерде X жана Y көптүктөрүнүн ортосундагы көз карандылык таблицанын жардамы менен берилсе, анда функцияны таблицалык жол менен берилген деп айтабыз.* Бул учурда аргументтин ар бир маанисине функциянын тиешелүү анык бир мааниси таблица аркылуу көрсөтүлөт. Мисалы,

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

таблицасы аркылуу берилген функция $y = x^2$ параболасын аныктайт.

4. Функциянын сөз түрүндө берилиши. Айрым учурда функцияны формула түрүндө жазууга мүмкүн болбой же кыйын болуп калат. Мындай учурда функция сөз түрүндө түшүндүрүлөт.

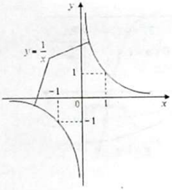
Мисалы, сандын бүтүн бөлүгүн аныктоочу функцияны сөз түрүндө төмөнкүдөй берүүгө болот: *сандын бүтүн бөлүгү деп ар бир* *чыныгы x санына бул сандан ашып кетпеген бүтүн санды тиешелештикке коюучу функцияны айтабыз жана $[x]$ деп белгилейбиз.*

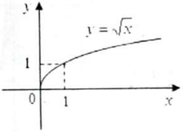
7.3. Негизги элементардык функциялар жана алардын графиктери

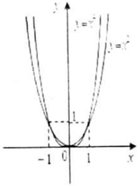
Негизги элементардык функциялар деп даражалуу, көрсөткүчтүү, логарифмалык, тригонометриялык жана тескери тригонометриялык функцияларды айтабыз.

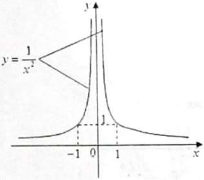
1. Даражалуу функция $y = x^n$, мында n - нөлдөн айырмалуу чыныгы сан. Бул функциянын графиги n санына байланыштуу болот. Эгерде n жуп сан болсо, анда график квадраттык параболага окшош болот. Эгерде n так сан болсо, анда график кубдук параболага окшош болот.

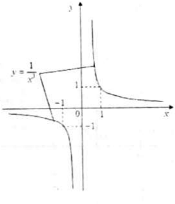
$y = \dfrac{1}{x}\ (n = -1),\quad y = \sqrt{x}\ (n = \dfrac{1}{2})$ функцияларынын графиктерин көрсөтөбүз.

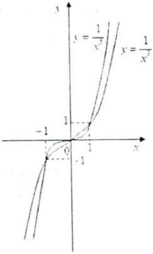




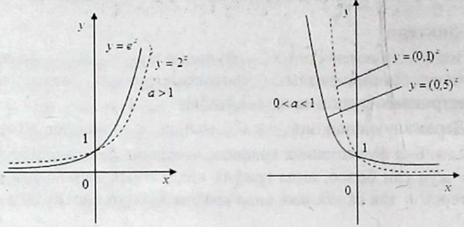




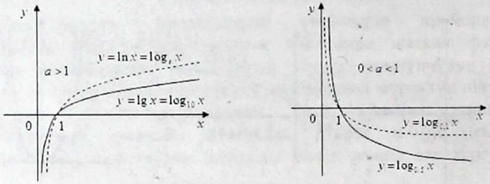




2. Көрсөткүчтүү функция $y = a^x$ $(a > 0, \ a \neq 1)$.

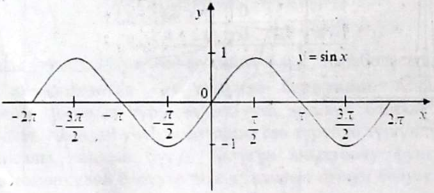


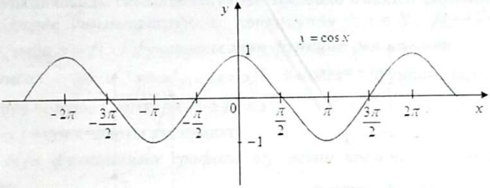
3. Логарифмалык функция $y = log_a x$ $(a > 0, \ a \neq 1)$.



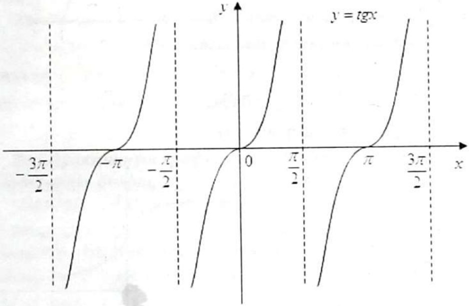
4. Тригонометриялык функциялар

$y = sinx, \ y = cosx, \ y = tgx, \ y = ctgx.$

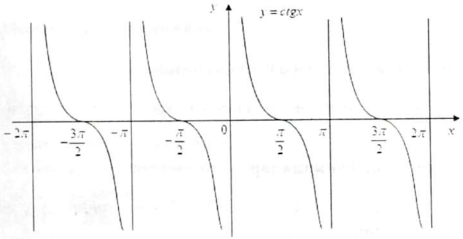




y
y = cos x
1
−1
0
x
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π

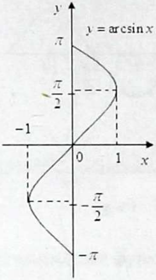


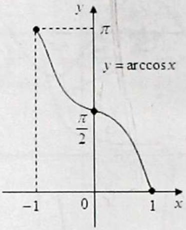
y
y = tgx
0
x
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2

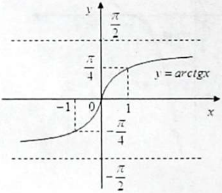


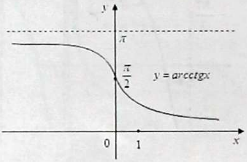
y
y = ctgx
0
x
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π

5. Тескери тригонометриялык функциялар
$y = arcsin\,x,\;\; y = arccos\,x,\;\; y = arctgx,\;\; y = arcctgx$.









7.4. Функциянын негизги мүнөздөмөлөрү

Функцияларды изилдөөдө алардын касиеттери негизги ролду ойнойт.

Жуп жана так функциялар

Эгерде $\forall x \in X : x \in X \Rightarrow -x \in X$ *болсо, анда* X *көптүгү* ***симметриялуу көптүк*** *деп аталат.*

Мисалы, $X=(-1,1)$, $X=(-a,a)$, $X=(-\infty,\infty)$, $X=[-2,2]$, көптүктөрү симметриялуу көптүктөрдүн мисалдары болот. Жуп жана так функцияларды симметриялуу көптүктөрдө изилдеп үйрөнөбүз.

*Эгерде симметриялуу X көптүгүндө $\forall x \in X : f(-x)=f(x)$ болсо, анда $y=f(x)$ функциясы **жуп функция** деп аталат.*

1-мисал. $y=x^2$, $y=x^4$, ... , $y=x^{2n}$, $y=\cos x$ функциялары жуп функция болушат, анткени $(-x)^2=x^2$, $(-x)^4=x^4$, ... , $(-x)^{2n}=x^{2n}$, $\cos(-x)=\cos x$ шарты аткарылат.

Жуп функциянын графиги Oy огуна карата симметриялуу болот.

Мисалы $y=x^2$, $y=x^4$, $y=\cos x$ функциялары жуп функциялар болушат.

*Эгерде симметриялуу X көптүгүндө $\forall x \in X : f(-x)=-f(x)$ болсо, анда $y=f(x)$ функциясы **так функция** деп аталат.*

2-мисал. $y=x^3$, $y=x^5$, ... , $y=x^{2n+1}$, $y=\sin x$ функциялары так функциялар болушат, себеби $(-x)^3=-x^3$, $(-x)^5=-x^5$, ... , $(-x)^{2n+1}=-x^{2n+1}$, $\sin(-x)=-\sin x$ шарты аткарылат.

Так функциянын графиги координата башталышына карата симметриялуу болот.

Мисалы $y=x^3$, $y=x^5$, $y=\sin x$ функциялары так функциялар болушат.

Эскертүү. Бардык эле функциялар так же жуп боло бербейт. Мисалы, $y=x^2-x+1$, $y=x+\cos x$, $y=2^x$, $y=\lg x$ функциялары жуп да так да эмес.

Монотондуу функциялар

Эгерде $x_1<x_2$ шартын канааттандырган аныкталуу областынын каалаган x_1, x_2 үчүн $f(x_1)<f(x_2)$ аткарылса, анда $f(x)$ функциясы **өсүүчү** деп аталат (эгерде $f(x_1)\le f(x_2)$ шарты аткарылса анда функция **кемибөөчү** деп аталат).

Эгерде $x_1<x_2$ шартын канааттандырган аныкталуу областынын каалаган x_1, x_2 үчүн $f(x_1)>f(x_2)$ аткарылса, анда $f(x)$ функциясы **кемүүчү** деп аталат (эгерде $f(x_1)\ge f(x_2)$ шарты аткарылса анда функция **өспөөчү** деп аталат).

Өсүүчү, кемүүчү, кемибөөчү, өспөөчү функциялар каралып жаткан көптүктө **монотондуу функциялар** деп аталат. Ал эми өсүүчү жана кемүүчү функцияларды **так (строго) монотондуу** функциялар деп аташат.

Функция монотондуу болгон интервалды **монотондуулук интервалы** деп аташат.

3-мисал. $y = \sin x$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ интервалында монотондуу өсүүчү, ал эми $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ интервалында монотондуу кемүүчү.

4-мисал. $y = \cos x$ функциясы $[-\pi; 0]$ интервалында монотондуу өсүүчү, ал эми $[0; \pi]$ интервалында монотондуу кемүүчү.

Чектелген жана чектелбеген функциялар

Эгерде $\forall x \in D$ үчүн $M > 0$ саны табылып $|f(x)| \le M$ шарты аткарылса, анда $y = f(x)$ функциясы D көптүгүндө ***чектелген функция*** *деп аталат.*

Бул учурда $y = f(x)$ функциясынын графиги $y = M$ жана $y = -M$ түз сызыктарынын арасында жатат. Мисалы, $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларынын графиктери $y = 1$, $y = -1$ түз сызыктарынын арасында чектелген.

Мезгилдүү функциялар

Эгерде $\forall x \in D$ үчүн

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

аткарыла тургандай $T \neq 0$ саны жашаса, анда $y = f(x)$ функциясы D көптүгүндө ***мезгилдүү функция*** *деп аталат.*

Мында T саны f функциясынын **мезгили** деп аталат.

Мисалы, $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларынын мезгили $T = 2\pi$, ал эми $y = tgx$, $y = ctgx$ функцияларынын мезгили $T = \pi$ барабар.

7.5. Тескери функция

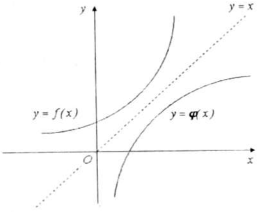
Аныкталуу областы D жана маанилеринин областы E болгон $y = f(x)$ функциясы берилсин. Эгерде ар бир $y \in E$ маанисине жалгыз гана $x \in D$ мааниси тиешелештикке коюлса, анда аныкталуу областы E жана маанилеринин областы D болгон $x = \varphi(y)$ ***тескери функциясы*** *аныкталган болот. Мында $\varphi(y)$ функциясы $f(x)$ функциясына тескери функция болот жана $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ аркылуу белгиленет. $y = f(x)$ жана $x = \varphi(y)$ функциялары өз ара тескери функциялар деп аташат.*

Тескери функцияны табуу үчүн $y = f(x)$ функциясын x ке карата чечип коюу керек (эгер мүмкүн болсо).

5-мисал. $y = 2x$ функциясына тескери функция $x = \dfrac{y}{2}$ функциясы болот.

6-мисал. $y = x^2$, $x \in [0;1]$ функциясына тескери функция $x = \sqrt{y}$ функциясы болот. Ал эми $[-1;1]$ кесиндисинде $y = x^2$ функциясына тескери функция жашабайт, себеби y тин бир маанисине x тин эки мааниси тиешелеш (эгер $y = \dfrac{1}{4}$ болсо, анда $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ болот).

Так (строго) монотондуу функция тескери функцияга ээ. Эгерде функция өсүүчү (кемүүчү) болсо, тескери функция да өсүүчү (кемүүчү) болот. $y = f(x)$ жана $x = \varphi(y)$ функциялары чиймеде бир функциянын графигин сүрөттөйт. $x = \varphi(y)$ тескери функциясынын аргументи ордината огунан орун алып ыңгайсыздыкты түзөт. Ошондуктан, тескери функцияны ыңгайлуу болушу үчүн кадимкидей эле $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$ аркылуу белгилейбиз.



Өз ара тескери функциялардын графиктери $y=x$ түз сызыгына карата симметриялуу болушат.

7-мисал. $y=2x-5, \quad x\in[0;5]$ функциясына тескери функция $y=\frac{x+5}{2}, \ x\in[-5;5]$ функциясы болот.

7.6. Татаал функция

Ушуга чейин аргументи көз каранды эмес өзгөрмө болгон функцияларды карадык. Көп учурда аргументи да кандайдыр бир жаңы өзгөрмөдөн функция болгон учурларды кароого туура келет.

*Эгерде $y=f(u)$ функциясынын аргументи u да кандайдыр бир x тен функция болсо, б.а. $u=\varphi(x)$, анда y өзгөрмөсү да x тен функция болот. Мындай функцияны **татаал функция** деп атайбыз жана $y=f[\varphi(x)]$ аркылуу белгилейбиз.*

Айрым учурда татаал функцияны берилген **функциялардын суперпозициясы** же **функциядан функция** деп аташат.

8-мисал. $y=lg\,u, \ \ u=\sin x$ болсо, анда $y=lg(\sin x)$ xтен татаал функция болот.

8- ГЛАВА. УДААЛАШТЫК ЖАНА АНЫН ПРЕДЕЛИ. ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ

8.1. Сандык удаалаштык

Эгерде ар бир натуралдык n санына кандайдыр бир эрежении негизинде чыныгы сан тиешелештикке коюлса, анда сандык удаалаштык берилген деп айтабыз:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ ,x_n,\ \ldots \tag{1}$$

Мында x_1 - удаалаштыктын биринчи мүчөсү (элементи), x_2 - удаалаштыктын экинчи мүчөсү, x_n - удаалаштыктын n-мүчөсү (жалпы мүчөсү) деп аталат.

Удаалаштык $\{x_n\}$ же $x_n,\ n \in N$ же (1) формула аркылуу белгиленет, б.а. ар бир натуралдык n үчүн x_n саны тиешелештикке коюлат.

Удаалаштыкты тегиздикте төмөнкүдөй сүрөттөөгө болот: Ox огунда $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ натуралдык сандарын жайгаштырабыз. Бул сандар удаалаштыктын мүчөлөрүнүн номерлери. $x=1,\ x=2,\ x=3, \ldots$ чекиттери аркылуу Ox огуна перпендикулярларды жүргүзөбүз. $x=1$ чекити аркылуу өтүүчү перпендикулярда x_1 чоңдугун өлчөп M_1 чекитин алабыз. $x=2$ чекити аркылуу өтүүчү перпендикулярда x_2 чоңдугун өлчөп M_2 чекитин алабыз ж.б. Мына ошентип $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, \ldots$ чекиттердин удаалаштыгын алабыз. Удаалащтыктын графиги чекиттерден турат.

Мына ошентип, **удаалаштык бул натуралдык аргументтүү функция экен.** Анын аргументи оң натуралдык маанилерди кабыл алат.

1-мисал. $x_n = \dfrac{1}{n},\ n \in N$ сандык удаалаштыгын карайлы. Бул удаалаштыкты ачып жазып чыксак $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$ удаалаштыгына ээ болобуз.

Удаалаштыктын бардык мүчөлөрү барабар маанилерге ээ болсо, анда аны **турактуу** удаалаштык деп айтабыз.

2-мисал. $x_n = cos(2\pi n),\ n \in N$ удаалаштыгы берилсин. Анын бир канча мүчөлөрүн карап чыгалы.

Чыгаруу. $x_1 = cos\,2\pi = 1,\quad x_2 = cos\,4\pi = 1,\quad x_3 = cos\,6\pi = 1$ ж.б. Бул удаалаштык $1, 1, 1, 1, \ldots$ түрүндө болот, б.а. турактуу удаалаштык.

Удаалаштыкты берүүнүн башка бир жайылтылган түрү бул **рекурренттик** жол болуп эсептелет. Удаалаштыктын алгачкы мүчөлөрү берилип анын n-мүчөсүнүн формуласын кандайдыр бир эреже (формула) менен ага чейинки мүчөлөр аркылуу эсептөөгө болот.

Удаалаштыктын жалпы мүчөсүн ага чейинки келүүчү мүчөлөр аркылуу чыгаруу формуласы **рекурренттик катыш** деп аталат.

Мисалы,

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \qquad (2)$$

формула рекурренттик катышты аныктайт. Белгилеп кетүүчү нерсе рекурренттик катыш удаалаштыкты толук аныктабайт. Себеби, удаалаштыктын алгачкы мүчөлөрүн рекурренттик катыш аркылуу аныктоого мүмкүн эмес. Мисалы, (2) формула $n=1$, $n=2$ болгондо маанисин жоготот, б.а. x_0 жана x_{-1} мүчөлөрү удаалаштыкта жок. Ошондуктан мындай x_1 жана x_2 мүчөлөрүн кошумча берүү керек жана аларды **баштапкы берилгендер** деп аташат. x_3 мүчөсүнөн баштап баштапкы берилгендер жана рекурренттик катыш удаалаштыктын бардык мүчөлөрүн эсептөөгө мүмкүнчүлүк берет.

Мисалы, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ болсун. Анда (2) формуланын негизинде $x_3 = 2x_2 - x_1 = -1$, $x_4 = 2x_3 - x_2 = -2$, $x_5 = 2x_4 - x_3 = -3, \dots$ алабыз. Удаалаштык $1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots$ көрүнүштү алат.

Кээ бир учурда удаалаштыкты **сөз түрүндө**, б.а. анын мүчөлөрүн баяндоо аркылуу беришет.

Чектелген жана монотондуу удаалаштыктар

Эгерде M оң саны жашап каалаган натуралдык n үчүн

$$|x_n| \le M$$

барабарсыздыгы орун алса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгы ***чектелген*** *деп аталат, антпесе удаалаштык* ***чектелбеген*** *деп аталат.*

3-мисал. $x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, $u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}$ удаалаштыктары чектелген, ал эми $v_n = \{2, 5, 10, \dots, n^2+1, \dots\}$, $z_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots\}$ удаалаштыктары чектелбеген.

Эгерде каалаган n үчүн $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \ge x_n$) шарты аткарылса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгы ***өсүүчү (кемибөөчү)*** *деп аталат.*

Эгерде каалаган n үчүн $x_{n+1} < x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$ шарты аткарылса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгы ***кемүүчү (өспөөчү)*** *деп аталат.*

Бардык ушул сыяктуу удаалаштыктар ***монотондуу удаалаштыктар*** *деп аталат.* Жогорудагы x_n, u_n, v_n удаалаштыктары монотондуу, ал эми z_n удаалаштыгы монотондуу эмес.

8.2. Сандык удаалаштыктын предели

Жогорудагы $\{x_n\}$ удаалаштыгынын мүчөлөрү 1 санына жакындашып баратканын байкасак болот. Мында x_n, $n \in N$ удаалаштыгы 1 санына умтулат деп айтышат.

Эгерде каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн N номери табылып, $n > N$ болгон бардык nдер үчүн $|x_n - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алса, анда A ***саны*** $\{x_n\}$ ***удаалаштыгынын предели*** *деп аталат жана төмөнкүдөй жазылат:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Бул учурда $\{x_n\}$ удаалаштыгы A санына жыйналат деп аталат.

Кыскача, математикалык тилде удаалаштыктын пределин төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

lim - бул латын алфавитинин limes деген сөзүнүн биринчи үч тамгасы жана ал "предел" дегенди түшүндүрөт. limes сөзүн пределди белгилөө үчүн биринчи жолу И. Ньютон колдонгон, 1786-жылы француз окумуштуусу С. Люилье да lim символун кийирген, ал эми пределди $\lim\limits_{n\to\infty}$ деп жазууну биринчи болуп 1855-жылы англиялык окумуштуу У. Гамильтон сунуштаган.

4-мисал. $x_n = \dfrac{n-1}{n}$ удаалаштыгынын $n \to \infty$ умтулгандагы пределин тапкыла.

Чыгаруу. Эгерде бул удаалаштыкта түздөн-түз пределге өтсөк, анда $\dfrac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздыкты алабыз. Ошондуктан эң оболу өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп, андан кийин пределге өтүшүбүз керек. Алымынан nди кашаанын сыртына чыгарып, бөлүмүндөгү n менен кыскартабыз. Андан кийин пределге өтсөк болот, себеби аныксыздык жоюлат:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1.$$

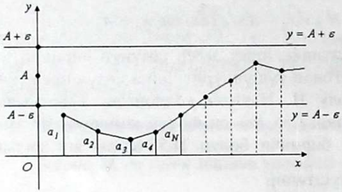
Демек, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, б.а. удаалаштык 1 деген пределге ээ экен.

8.3. Предел түшүнүгүнүн геометриялык мааниси

$\{x_n\}$ удаалаштыгы берилип, ал A пределине ээ болсун. Анда каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн N номери жашап $\forall n > N$ үчүн $|x_n - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат. Бул барабарсыздыкты $-\varepsilon < x_n - A < \varepsilon$ же $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$ түрүндө жазабыз.

Мына ошентип, Nден чоң болгон бардык nдер үчүн удаалаштыктын бардык мүчөлөрү $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ аралыгында жатат.

Oy огунда $A-\varepsilon$, A, $A+\varepsilon$ сандарын жайгаштыралы. $A-\varepsilon$ жана $A+\varepsilon$ сандары аркылуу *Ox* огуна параллель түз сызыктарын жүргүзөбүз.



Геометриялык жактан $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$ барабарсыздыгы $\{x_n\}$ удаалаштыгынын мүчөлөрү $y = A - \varepsilon$ жана $y = A + \varepsilon$ түз сызыктарынын арасында жайгашкан дегенди билдирет.

Мына ошентип, $\{x_n\}$ удаалаштыгы A пределине ээ болсо, анда $\forall n > N$ үчүн $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ тилкесинде

$$x_{N+1},\ x_{N+2},\ x_{N+3},\ \dots\ ,\ x_n,\ \dots \qquad n > N$$

удаалаштыктын мүчөлөрү жатат. Ал эми $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ тилкесинин сыртында чектүү сандагы удаалаштыктын мүчөлөрү калат $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\ ,\ x_N$.

1-теорема. Эгерде удаалаштык пределге ээ болсо, анда ал чектелген болот.

2-теорема. Жыйналуучу удаалаштык жалгыз гана пределге ээ болот.

3-теорема. Турактуунун предели ал турактуунун өзүнө барабар.

4-теорема. Пределдерге ээ болгон удаалаштыктардын суммасынын предели алардын пределдеринин суммасына барабар.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim_{n\to\infty} y_n = B,\ \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B.$$

5-теорема. Пределдерге ээ болгон удаалаштыктардын көбөйтүндүсүнүн предели алардын пределдеринин көбөйтүндүсүнө барабар.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim_{n\to\infty} y_n = B,\ \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B.$$

8.4. Функциянын предели

$y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинин чеке белинде аныкталсын.

A саны $y = f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги предели деп аталат, эгерде каалаган кичине $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырган жана x_0 дөн айырмалуу болгон бардык xтер үчүн

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылса.

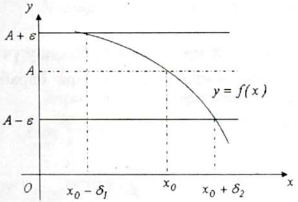
Аныктоого кирген δ саны ε го көз каранды жана ε кичирейген сайын δ да кичирейет.

Функциянын пределин

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

аркылуу белгилейбиз.

Мына ошентип, аргументтин мааниси кандайдыр бир x_0 чекитине жакындаган сайын, $y = f(x)$ функциясынын мааниси А пределине жакындайт.



Графиктик жол менен $y = f(x)$ функциясы А пределине ээ болушун түшүндүрүп берели.

Oy огунда А чекитинин ε чеке белин алабыз, ал эми *Ox* огунда x_0 чекитинин $(x_0 - \delta_1,\ x_0 + \delta_2)$ чеке белин алабыз. Бул интервалдын бардык чекиттеринде $y = f(x)$

функциясынын бардык маанилери $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$ түз сызыктары менен чектелген туурасы 2ε болгон тилкеден чыкпайт. δ_1, δ_2 сандарынын ичинен кичинесин тандап δ деп белгилейбиз. Анда x_0 дөн айырмалуу болгон бардык xтер үчүн жана $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ же $|x - x_0| < \delta$ шартын канаатандырган $y = f(x)$ функциясынын бардык маанилери жогоруда аталган тилкеден чыгып кетпейт, б.а. $|f(x) - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат.

5-мисал. $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 5) = 7$ экенин көрсөтөлү.

Чыгаруу. Каалаган $\varepsilon > 0$ алалы, анда $|(2x + 5) - 7| < \varepsilon$ барабарсыздыгы бардык xтер үчүн аткарылат эгерде $|2x - 2| < \varepsilon$ аткарылса. Ал үчүн $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ барабарсыздыгынын аткарылышы жетиштүү.

Мына ошентип, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ деп белгилесек, анда $|x - 1| < \delta$ шартын канааттандырган бардык x тер үчүн $|(2x + 5) - 7| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат. Демек, $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 5) = 7$.

Эскертүү. $y = f(x)$ функциясы $x \to x_0$ умтулганда x x_0 дөн кичине болгондо A_1 пределине ээ болсо, анда функция **бир жактуу сол пределге** ээ деп аталат жана

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$$

аркылуу белгиленет.

$y = f(x)$ функциясы $x \to x_0$ умтулганда x x_0 дөн чоң болгондо A_2 пределине ээ болсо, анда функция **бир жактуу оң пределге** ээ деп аталат жана

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

аркылуу белгиленет.

$y = f(x)$ функциясынын x_0 чекитинде A пределине ээ болушу үчүн бул чекитте сол жана оң пределдери жашап алар өз ара барабар болушу зарыл жана жетиштүү, б.а.

$$A_1 = A_2.$$

Бул учурда $A_1 = A_2 = A$ болот.

8.5. Биринчи сонун предел

Тригонометриялык функцияларды кармаган туюнтмалардын пределдерин эсептөөдө **биринчи сонун предел** деп аталуучу төмөнкү предел көп колдонулат

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

Синустун аргументке болгон катышынын аргумент нөлгө умтулгандагы предели 1ге барабар деп окулат.

1-мисал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу. Мында $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздык турат. (1) формуланы пайдаланалы десек синустун аргументи $3x$, ал эми аргументи x гана болуп турат. Ошондуктан, алымына жана бөлүмүнө 3тү көбөйтүп жана бөлөбүз: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}$. Андан соң өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп, төмөнкүнү алабыз

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

2-мисал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу. Синустун аргументине бөлүмүн окшош кылып алуу керек, ошондуктан 4кө көбөйтүп жана бөлүп биринчи сонун пределди колдонобуз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{5\cdot 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{5}\frac{\sin 4x}{4x}=$$

$$=\frac{4}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4}{5}.$$

3-мисал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу. Өзгөртүп түзүү жүргүзөбүз

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Биринчи сонун пределден келип чыгуучу натыйжалар:

1°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;$

2°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1;$

4°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1.$

8.6. Экинчи сонун предел

Пределдерди эсептөөдө **экинчи сонун предел** деп аталуучу төмөнкү барабардык кеңири колдонулат:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\ell. \tag{1}$$

(1) формулада предел ℓ санына барабар. Аны **непердик** сан деп атап коюшат. ℓ саны иррационалдуу, анын жакындаштырылган мааниси 2.72ге ($\ell = 2{,}718281828459045...$) барабар. Бизге белгилүү ℓ санын натуралдык логарифмдердин негизи катары кабыл алышат: ℓ негизи боюнча логарифм натуралдык логарифм деп аталат жана $\ln x$ аркылуу белгиленет, б.а. $\ln x=\log_\ell x$.

Эгерде (1) формулада $\frac{1}{x}=\alpha$ ($x\to\infty$ *умтулганда* $\alpha\to 0$) белгилөөсүн жүргүзсөк, анда ал төмөнкү көрүнүштө жазылат

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\ell. \tag{2}$$

(2) формула да экинчи сонун предел деп аталат.

1-мисал. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу. Мында $x\to\infty$ умтулганда 1^∞ түрүндөгү аныксыздык турат. $x=2t$ белгилөөсүн жүргүзөбүз (мында $x\to\infty$ умтулганда $t\to\infty$ умтулгандыгы көрүнүп турат). Анда, ордуна коюп жана өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{2}{2t})^{2t}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{2t}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t\cdot\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=\ell\cdot\ell=\ell^2.$$

2-мисал. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x+3})^{2x+1}$ пределин эсептегиле.

Мында даражанын негизи $\ell im_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+3}=\ell im_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{3}{x})}=\ell im_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{1+0}{1+0}=1$ ге барабар, ал эми даражасы $2x+1\to\infty$ умтулат, б.а. 1^{∞} түрүндөгү аныксыздыкты берет. Ошондуктан экинчи сонун пределди колдонсо болот.

$$\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x+1}=\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+2-2}{x+3}\right)^{2x+1}=\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)-2}{x+3}\right)^{2x+1}=$$

$$=\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+3}+\frac{-2}{x+3}\right)^{2x+1}=\ell im_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{2x+1}=\ell im_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}\frac{-2}{x+3}(2x+1)}=$$

$$=\ell im_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}\frac{-2}{x+3}(2x+1)}=\left[\ell im_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x+3}(2x+1)}=\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x-3}(2x+1)}=$$

$$=\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x-3}(2x+1)}=\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{-4x-2}{x+3}}=\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}}=\ell^{-4}=\frac{1}{\ell^4}.$$

Мына ошентип, $\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x-1}$ тунтмасынын предели $\frac{1}{\ell^4}$ барабар.

Мында биз экинчи сонун пределдин (2) формуласын пайдаландык.

9-ГЛАВА. ТУУНДУ. ФУНКЦИЯНЫН ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

9.1. Туунду түшүнүгүнө алып келүүчү маселелер

Туунду түшүнүгү математикалык түшүнүктөрдүн негизги түшүнүктөрүнүн бири болуп эсептелет. Туундунун жардамында математикадагы, физикадагы ж.б. илимдердеги бир топ маселелерди чыгарууга болот.

Туунду түшүнүгү XVII кылымда дифференциалдык эсептөөнүн элементтери пайда боло баштаганда эле пайда болгон. Туунду түшүнүгүнүн пайда болушу тарыхый жактан эки маселеге байланышкан: кыймылдын ылдамдыгын табуу жана ийриге жаныма жүргүзүү маселелери.

Физикадан бизге белгилүү болгондой бир калыптагы кыймылдын формуласы

$$S = v \cdot t, \tag{1}$$

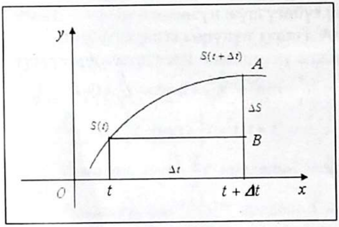
аркылуу берилет. Мында v - бир калыпта кыймылдын ылдамдыгы (v - турактуу чоңдук), S - бул t моментинде басып өткөн жол.

Мына ошентип, бир калыпта кыймылда басып өткөн жол убакыттан көз каранды болгон түз сызыктуу кыймыл болуп, анын графиги түз сызык болот.

(1) формуладан

$$v = \frac{S}{t} \tag{2}$$

формуласын алабыз. Мындан, бир калыпта кыймылдын ылдамдыгын табуу үчүн басып өткөн жолду убакытка бөлүү керек деген тыянакка келебиз.



Бирок жаратылышта болгон кыймылдар дайым эле бир калыпта боло бербейт, ошондуктан басып өткөн жол убакыттан сызыктуу функция болбой, татаал функцияны берип калат.

Жалпы учурда басып өткөн жол убакыттан көз каранды болгон функция болот $S(t)$.

Чиймеде көрүнүп тургандай, эгерде убакыттын t моментинде тело $S(t)$ жолун басып өттү, ал эми $t+\Delta t$ моментинде тело $S(t+\Delta t)$ жолун басып өттү десек, анда убакыттын Δt аралыгында тело $S(t+\Delta t)-S(t)$ жолун басып өткөн болот. Бул айырма $S(t)$ функциясынын өсүндүсү деп аталат жана ΔS аркылуу белгиленет:

$$\Delta S = S(t+\Delta t)-S(t) \qquad (3)$$

Геометриялык жактан ΔS чоңдугу AB кесиндисинин узундугун аныктайт.

Мына ошентип, тело t моментинен $t+\Delta t$ моментине чейин ΔS жолун басып өттү. Эгерде бул убакыт ичинде тело бир калыпта кыймылда болгондо, анда (2) формуланын негизинде телонун ылдамдыгы $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ га барабар болмок. Бул $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ катышы t дан $t+\Delta t$ га чейинки аралыгындагы кыймылдын **орточо ылдамдыгы** деп аталат жана

$$v_{i\eth\ddot{o}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

аркылуу белгиленет. Бирок, орточо ылдамдык телонун t моментиндеги ылдамдыгын так мүнөздөп бере албайт, себеби тело Δt моментинин башында ылдам, ал эми аягында жай кыймылда болсо орточо ылдамдык бул өзгөчөлүктөрдү чагылдыра албай калат. Δt убакыт аралыгы канчалык кичине болсо, t моментиндеги ылдамдык ошончолук так мүнөздөлөт.

Ошондуктан $\Delta t \to 0$ умтулгандагы пределге өтөбүз.

Убакыттын t моментиндеги ылдамдыгы деп, орточо ылдамдыктын $\Delta t \to 0$ нөлгө умтулгандагы пределин айтабыз:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Мына ошентип, бир калыпта эмес кыймылдын ылдамдыгын табуу маселеси $S(t)$ функциясынын өсүндүсүн убакыттын өсүндүсүнө болгон катышындагы убакыттын өсүндүсү нөлгө умтулгандагы пределин кароого алып келди.

9.2. Туундунун аныктамасы

$y=f(x)$ функциясы x чекитинин чеке белинде аныкталган болсун. Эгерде x аргументи Δx өсүндүсүн кабыл алса, анда функция

Δy өсүндүсүн алат. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ катышын түзүп, $\Delta x \to 0$ нөлгө умтулгандагы пределге өтөбүз. Эгерде бул предел жашаса, анда ал $f(x)$ функциясынын x чекитиндеги туундусу деп аталат жана $f'(x)$ аркылуу белгиленет.

*Эгерде $f(x)$ функциясынын өсүндүсүнүн аргументтин өсүндүсүнө болгон катышынын аргументтин өсүндүсү нөлгө умтулгандагы чектүү предели жашаса, анда ал предел $f(x)$ функциясынын x чекитиндеги **туундусу** деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет:*

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (4)$$

1-мисал. $y = x^2$ функциясынын x чекитиндеги туундусун аныктоонун жардамында табалы.

Чыгаруу. Мында $f(x) = x^2$, ал эми $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$ көрүнүштү алат. Анда (4) формулага койсок

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

алабыз, б.а. $y' = 2x$.

*Берилген функциядан туунду алуу процесси аны **дифференцирлөө** деп аталат.*

9.3. Туундунун механикалык мааниси

Жогоруда каралгандай $S(t)$ - телонун убакыттын t моментиндеги басып өткөн жолу болсун. Телонун ылдамдыгы аныктама боюнча $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ барабар, экинчи жагынан туундунун аныктоосу боюнча $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ предели $S(t)$ функциясынын t боюнча туундусуна барабар, б.а.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

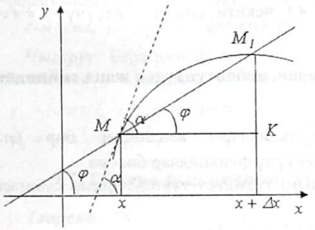
Демек, туундунун механикалык мааниси төмөнкүдөй: ***телонун ылдамдыгы басып өткөн жолдун убакыт боюнча алынган туундусуна барабар.***

Туундуну кандайдыр бир телонун ылдамдыгы деп түшүндүрсөк болот. Бирок ылдамдык деген сөздү механикалык кыймыл эле эмес жалпы түрдө өзгөрүү деп түшүнсөк да болот. Мисалы, y чоңдугу x ке көз каранды болуп өзгөрөт, анда y өзгөрмөсүнүн x ке салыштырмалуу өзгөрүүсү жөнүндө суроо коюуга болот.

Мисалы, эгерде Q - берилген химиялык реакцияга катышкан заттын саны болсо, анда $Q'(t)$ - заттын санынын өзгөрүү ылдамдыгы болот:

$$Q'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

9.4. Туундунун геометриялык мааниси



$y = f(x)$ функциясын кандайдыр бир x чекитинин чеке белинде карайлы. Ушул x чекитинен жаңы $x + \Delta x$ чекитине өтөбүз. Анда M_1K - функциянын өсүндүсү Δy, ал эми MK - аргументтин өсүндүсү Δx болот. MM_1K үч бурчтугунан $tg\varphi = \frac{M_1K}{MK} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ алабыз.

Демек, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - M_1M кесүүчүсүнүн Ox менен түзгөн жантаюу бурчунун тангенсин берет.

Мейли эми $\Delta x \to 0$ нөлгө умтулсун, анда M_1 чекити M чекитине умтулуп, M_1M кесүүчүсү чиймеде үзүк сызык менен көрсөтүлгөн **кесүүчүнүн пределдик абалына** келет. Демек, $tg\varphi \to tg\alpha$ умтулат. Мында α - M чекитине жүргүзүлгөн жаныманын жантаюу бурчу.

$tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ болгондуктан, $\Delta x \to 0$ умтулганда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to tg\alpha$ умтулат.

Пределге өтсөк $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$ алабыз, б.а. $y' = tg\alpha$.

Демек, туундунун берилген чекиттеги мааниси жаныманын Ох огуна болгон жантаюу бурчунун тангенсине барабар.

2-мисал. $y = x^2$ параболасына абциссасы $x = 2$ болгон чекитине жаныма жүргүзгүлө.

Чыгаруу. Параболанын графигин тургузабыз. $y(2) = 2^2 = 4$ болгондуктан жаныма $M(2, 4)$ чекити аркылуу өтүүсү керек.

Берилген чекит аркылуу өтүп берилген багыттагы түз сызыктын теңдемеси

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

көрүнүшүндө болот. Бул учурда $x_1 = 2$, $y_1 = 4$. $k = tg\alpha$ ны табуу керек. Ал үчүн $y' = 2x$ туундусун таап, $x = 2$ чекитинде анын маанисин аныктайбыз: $y' = 2 \cdot 2 = 4 = k$. Анда жогорудагы формулага табылгандарды коюп, $M(2, 4)$ чекити аркылуу өтүүчү $y = 4x - 4$ жанымасын алабыз.

9.5. Суммадан, айырмадан, көбөйтүндүдөн жана тийиндиден туунду алуу эрежелери

$u(x)$ жана $v(x)$ функциялары кандайдыр бир (a, b) кесиндисинде дифференцирленүүчү функциялар болсун.

1. Сумманын (айырманын) туундусу туундулардын суммасына (айырмасына) барабар, б.а.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

2. Эки функциянын көбөйтүндүнүн туундусу алардын биринчисинин туундусун экинчисине көбөйтүп, экинчисинин туундусун биринчисине көбөйтүп кошконго барабар, б.а.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

3. Турактуу чоңдук менен функцияны көбөйтүүдө турактуу чоңдукту функциянын туундусуна көбөйтүү жетиштүү, б.а.

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

4. $u(x)$ жана $v(x)$ функцияларынын тийиндисинин туундусу деп, алымында $u'v - uv'$ айырмасы, ал эми бөлүмүндө v^2 турган бөлчөктү айтабыз, б.а.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

мында $v(x) \neq 0$.

3-мисал. $(x^2 \cdot \sin x)'$ көбөйтүндүсүнүн туундусун тапкыла:

Чыгаруу. Экинчи эрежени пайдалансак болот:

$(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$.

9.6. Татаал функциянын туундусу

$y = f(u)$ жана $u = \varphi(x)$ функциялары берилсин. Анда y өзгөрмөсү xтен татаал функция болот: $y = f[\varphi(x)]$, мында u - аралыктагы аргумент.

Теорема. Эгерде $u = \varphi(x)$ функциясы x чекитинде u'_x туундусуна ээ болсо, ал эми $y = f(u)$ функциясы u чекитинде y'_u туундусуна ээ болсо, анда $y = f[\varphi(x)]$ татаал функциясынын туундусу

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (5)$$

формуласы боюнча табылат.

4-мисал. $y = \cos(x^4)$ функциясынын туундусун тапкыла.

Чыгаруу. Берилген функция татаал функция болгондуктан $u = x^4$ белгилөөсүн жүргүзүп, $y = \cos u$ алабыз. Анда (5) формула боюнча $y'_x = (\cos u)'_u \cdot (x^4)'_x = -\sin u \cdot 4x^3$ болот. $u = x^4$ болгондуктан $y'_x = -4x^3 \cdot \sin(x^4)$.

9.7. Тескери функциянын туундусу

Теорема. Эгерде $y = f(x)$ функциясы (a, b) интервалында так (строго) монотондуу жана бул интервалдын каалаган чекитинде нөлгө барабар эмес туундуга ээ болсун. Анда ага тескери болгон $x = \varphi(y)$ функциясы да ошол чекитте туундуга ээ болсо, анда $\varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ же } x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

формулалары менен аныкталат.

Башкача көрүнүшү:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ же } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \qquad (6)$$

5-мисал. Тескери функцияны дифференцирлөө эрежесин пайдаланып $y=\sqrt[3]{x-1}$ функциясынын туундусун тапкыла.

Чыгаруу. Берилген функцияга тескери функция $x=y^3+1$ функциясы болот. Анын туундусу $x'_y=3y^2$ барабар. Анда (6) формуланы пайдаланып $y'_x=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ алабыз.

9.8. Параметрдик түрдө берилген функциянын туундусу

x аргументи менен y функциясынын ортосундагы көз карандылык параметрдик түрдө берилсин:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \tag{7}$$

мында t - жардамчы өзгөрмө, б.а. параметр.

Параметрдик түрдө берилген функциянын y'_x туундусун табалы. Ал үчүн (7) формула менен берилген функциялар туундуга жана $x=x(t)$ функциясы $t=\varphi(x)$ тескери функциясына ээ деп эсептейбиз. Анда тескери функциянын туундусун табуу эрежеси боюнча

$$t'_x=\frac{1}{x'_t} \tag{8}$$

алабыз.

Берилген $y=f(x)$ функциясын татаал функция деп да кароого болот: $y=f(t)$, $t=\varphi(x)$.

Анда татаал функцияны дифференцирлөө эрежеси боюнча (8) формуладан пайдаланып, төмөнкүнү алабыз:

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t} \text{ б.а.}$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \tag{9}$$

(9) формула параметрдик түрдө берилген функциялардын y менен xтин ортосундагы көз карандылыгын таппай туруп y'_x туундусун табууга мүмкүнчүлүк берет.

6-мисал. $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^2 \end{cases}$ функциясы берилген. y'_x туундусун тапкыла.

Чыгаруу. $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$ туундуларын таап (9) формулага коебуз

$y'_x = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Муну текшерип койсок да болот. Ал үчүн y менен xтин ортосундагы көз карандылыкты табалы: биринчи теңдемеден $t = \sqrt[3]{x}$ табабыз да экинчи теңдемеге коюп, $y = \sqrt[3]{x^2}$. Мындан туунду алсак $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ келип чыгат.

9.9. Туундулардын таблицасы

1. $(c)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \cdot (x)'$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
17. $(shx)' = chx$
18. $(chx)' = shx$
19. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
20. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

10-ГЛАВА. ФУНКЦИЯНЫН ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

10.1. Дифференциал түшүнүгү

Дифференциал түшүнүгү туунду түшүнүгү менен тыгыз байланышкан жана ал практикалык көп маселелерди чечүүдө кеңири колдонулат.

x чекитинде y' туундусуна ээ болгон $y = f(x)$ функциясын карайлы. Туундунун аныктамасы боюнча $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ болгондуктан функциянын предели менен чексиз кичине чоңдуктун ортосундагы байланышы жөнүндөгү теореманын негизинде $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ деп жазууга болот, мында α - чексиз кичине чоңдук болуп эсептелет, б.а. $\Delta x \to 0$ умтулганда $\alpha \to 0$ умтулат. Анда функциянын өсүндүсүн төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (1)$$

Мына ошентип, функциянын өсүндүсү эки кошулуучудан турат: $y' \cdot \Delta x$ жана $\alpha \cdot \Delta x$. Бул эки чоңдук $\Delta x \to 0$ умтулганда чексиз кичине чоңдуктар болушат. Функциянын өсүндүсүнүн экинчи кошулуучусу $\alpha \cdot \Delta x$ чексиз кичине чоңдуктардын көбөйтүндүсүн берет жана анын функциянын Δy өсүндүсүнө таасири аз болот. Ошондуктан, функциянын өсүндүсүнүн башкы бөлүгү болуп биринчи кошулуучусу эсептелет, б.а. $y' \cdot \Delta x$.

$y' \cdot \Delta x$ чоңдугу Δx аргументинин өсүндүсүнүн биринчи даражасына түз пропорциялаш, ошондуктан аны өсүндүнүн сызыктуу бөлүгү деп атайбыз.

Мына ошентип, $y' \cdot \Delta x$ кошулуучусу функциянын өсүндүсүнүн **башкы сызыктуу бөлүгү** деп аталат.

Аныктама. *Функциянын Δy өсүндүсүнүн башкы сызыктуу бөлүгү ал* ***функциянын дифференциалы*** *деп аталат жана*

$$dy = y' \cdot \Delta x \qquad (2)$$

аркылуу белгиленет.

Анда (1) формуланы (2) ни эске алуу менен $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$ түрүндө жазууга болот. Мында, $\alpha \cdot \Delta x$ чоңдугу Δx ке караганда тез нөлгө умтулгандыктан $\Delta y = dy$ деп жазууга болот. dy дифференциалын биринчи тартиптеги дифференциал деп атайбыз.

x көз каранды эмес өзгөрмөсүнүн дифференциалын, б.а $y = x$ функциясынын дифференциалын табабыз. Анда (2) нин негизинде $dy = y' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x$ алабыз, б.а. $dy = \Delta x$. Экинчи жактан $dy = dx$ болгондуктан $dx = \Delta x$ болот. Ошондуктан (2) формуланы

$$dy = y' \cdot dx \qquad (3)$$

түрүндө жазууга болот, б.а. функциянын дифференциалы бул функциянын туундусу менен көз каранды эмес өзгөрмөнүн дифференциалына көбөйткөнгө барабар.

1-мисал. $y = x^5$, $y = \sin x$, $y = \cos 3x$ функцияларынын дифференциалдарын тапкыла.

Чыгаруу. 1) Туундусу $y' = 5x^4$ барабар. (3) формуланы пайдалансак $dy = 5x^4 dx$ алабыз; 2) $dy = \cos x dx$; 3) $dy = -3 \sin 3x dx$.

10.2. Дифференциалдардын таблицасы

1. $d(c) = 0$, c – турактуу
2. $d(x) = 1$
3. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$
4. $d(\sqrt{x}) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
5. $d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot (x)'dx$
6. $d(e^x) = e^x dx$
7. $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x}\log_a e dx = \dfrac{dx}{x \ln a}$
8. $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$
9. $d(\sin x) = \cos x dx$
10. $d(\cos x) = -\sin x dx$
11. $d(tgx) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
12. $d(ctgx) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
13. $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $d(arctgx) = \dfrac{dx}{1+x^2}$
16. $d(arcctgx) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$
17. $d(shx) = chxdx$
18. $d(chx) = shxdx$
19. $d(thx) = \dfrac{dx}{ch^2 x}$
20. $d(cthx) = -\dfrac{dx}{sh^2 x}$

10.3. Суммадан, көбөйтүндүдөн жана тийиндиден дифференциал алуу эрежелери

$u(x)$ жана $v(x)$ функциялары тиешелүү түрдө $u'(x)$ жана $v'(x)$ туундуларына ээ болуучу функциялар болсун. $d(u+v)$, $d(u\cdot v)$ жана $d(\frac{u}{v})$ дифференциалдарын табалы.

1. $d(u+v)=(u+v)'dx=u'dx+v'dx=du+dv,$
2. $d(u\cdot v)=(u\cdot v)'dx=(u'v+uv')dx=u'vdx+uv'dx=vdu+udv,$
3. $d(\frac{u}{v})=(\frac{u}{v})'dx=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx=\frac{u'vdx-uv'dx}{v^2}=\frac{vdu-udv}{v^2}.$

2-мисал. $u=x^4$, $v=cos(7x+8)$ функциялары берилсе, анда $d(u+v)$, $d(u\cdot v)$, $d(\frac{u}{v})$ тапкыла.

Чыгаруу. Жогорудагы эрежелерди колдонуп

$$d(u+v)=(x^4+cos(7x+8))'dx=(4x^3-7\,sin(7x+8))dx,$$

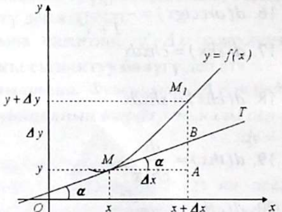
$$d(u\cdot v)=(x^4\cdot cos(7x+8))'dx=(4x^3\cdot cos(7x+8)-7x^4\cdot sin(7x+8))dx,$$

$$d(\frac{u}{v})=(\frac{x^4}{cos(7x+8)})'dx=\frac{4x^3\,cos(7x+8)+7x^4\,sin(7x+8)}{cos^2(7x+8)}.$$

алабыз.

10.4. Дифференциалдын геометриялык мааниси

$y=f(x)$ функциясынын графигинин $M(x,y)$ чекитине MT жанымасын жүргүзөбүз. x чекитинде функция туундуга ээ болсун. Жаныма менен Ox огунун оң багытынын арасындагы бурчту α деп белгилейли. x чекитине Δx өсүндүсүн берип $x+\Delta x$ чекитинин ординатасын, б.а. M_1A кесиндисин карайбыз.



Чиймеде көрүнүп тургандай $MA=\Delta x$, $M_1A=\Delta y$. MBA тик бурчтуу үч бурчтугун карайбыз: $tg\alpha=\frac{AB}{MA}$, б.а.

$AB = tg\alpha \cdot MA$. Туундунун геометриялык мааниси боюнча $tg\alpha = y'$ барабар, анда ордуна койсок: $AB = y' \cdot \Delta x$. $\Delta x = dx$ болгондуктан $AB = y'dx$ болот. Дифференциалдын аныктамасы боюнча $dy = y'dx$ болгондуктан $AB = dy$ болот. Демек, $dy = AB$.

Мына ошентип, $y = f(x)$ *функциясынын* x *чекитиндеги дифференциалы функциянын жанымасынын өсүндүсүнө (AB кесиндисинин узундугуна) барабар. Ошондуктан, жаныманын өсүндүсү дифференциалдын геометриялык маанисин аныктайт.*

10.5. Дифференциалдын жакындаштырып эсептөөдөгү колдонулушу

Эгерде $y = f(x)$ функциясынын x чекитиндеги өсүндүсүн $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ түрүндө көрсөтүүгө боло тургандыгы бизге билгилүү, мында $\Delta x \to 0$ умтулганда $\alpha \to 0$ умтулат. Дифференциалды колдонуп өсүндүнү төмөнкүдөй жазса болот: $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Экинчи кошулуучу Δx ке караганда жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук болгондуктан, аны таштап жиберүү менен

$$\Delta y \approx dy \tag{4}$$

жакындаштырылган формуланы алабыз. (4) формула Δx кичирейген сайын тагыраак болот. Ошондуктан (4) формула каалаган дифференцирленүүчү функциянын өсүндүсүн жогорку тартиптеги тактык менен жакындаштырып эсептөөгө мүмкүнчүлүк берет.

Функциянын дифференциалын табууга караганда анын өсүндүсүн табуу бир топ жеңил. Ошондуктан (4) формула практикада кеңири колдонулат.

3-мисал. $y = x^3 - 2x + 1$ функциясынын өсүндүсүнүн $x = 2$ жана $\Delta x = 0{,}001$ маанилериндеги жакындаштырылган маанилерин тапкыла.

Чыгаруу. (4) формуланы пайдаланабыз:

$$\Delta y \approx dy = y' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x.$$

$dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0{,}001}} = (3 \cdot 4 - 2) \cdot 0{,}001 = 0{,}01,$ анда $\Delta y \approx 0{,}01$ барабар.

Биз азыр функциянын өсүндүсүн эсептөөнүн ордуна функциянын дифференциалын эсептедик. Канчалык каталык кеткенин эсептеп көрөлү. Ал үчүн Δy ти табалы:

$$\Delta y=((x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+1)-(x^3-2x+1)=$$
$$=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+1-x^3+2x-1=$$
$$=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2\Delta x=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-2);$$
$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,001}}=0,001(3\cdot 4+3\cdot 2\cdot 0,001)+0,001^2-2=0,010006.$$

Абсолюттук каталыктын жакындашуусу

$|\Delta y-dy|=|0,010006-0,01|=0,000006$ га барабар. (4) формулага Δy тин жана dy тин маанилерин ордуна койсок $f(x+\Delta x)-f(x)\approx$ $\approx y'\cdot\Delta x=f'(x)\cdot\Delta x$ болот. Ошондуктан

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \qquad (5)$$

алабыз. (5) формула функциялардын маанилерин жакындаштырып эсептөө үчүн колдонулат.

4-мисал. $arctg\,1,05$ ти жакындаштырып эсептегиле.

Чыгаруу. (5) формуланы пайдаланабыз:

$arctg(x+\Delta x)\approx arctgx+(arctgx)'\Delta x$ же

$$arctg(x+\Delta x)\approx arctgx+\frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

$x+\Delta x=1,05=1+0,05,$ мында $x=1,\ \Delta x=0,05$. Анда

$arctg(1+0,05)\approx arctg1+\dfrac{0,05}{1+1^2}=\dfrac{\pi}{4}+0,025\approx 0,810$ барабар.

Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда ал чекиттин чеке белинде берилген функцияны

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (6)$$

формула менен жакындаштырып эсептөөгө болот.

Эгерде (5) формулада $x=x_0,\ \Delta x=x-x_0$ деп алсак, анда (6) формула келип чыгат.

5-мисал. $\sqrt{3,998}$ эсептегиле.

Чыгаруу. Тамырдан түздөн –түз чыгаруу кыйынчылыктарды пайда кылат. Ошондуктан $f(x)=\sqrt{x},x\in(0,+\infty)$ функциясын карайлы. Бул функция үчүн (6) формула

$$\sqrt{x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

көрүнүшүндө болот. $x = 3{,}998,\ x_0 = 4$ маанилерин формулага коюп төмөнкүнү алабыз

$$\sqrt{3{,}998} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(3{,}998 - 4) = 2 - \frac{0{,}002}{4} = 1{,}9995.$$

6-мисал. $\sqrt[5]{243{,}45}$ эсептегиле.

Чыгаруу. Мында $f(x) = \sqrt[5]{x},\ x \in R$ функциясы үчүн формула

$\sqrt[5]{x} \approx \sqrt[5]{x_0} + \dfrac{1}{5x_0^{4/5}}(x - x_0)$ көрүнүштө болот.

$x = 243{,}45,\ x_0 = 243 = 3^5$ маанилерин формулага коюп төмөнкүнү алабыз

$$\sqrt[5]{243{,}45} \approx \sqrt[5]{3^5} + \frac{1}{5(3^5)^{\frac{4}{5}}}(243{,}45 - 243) = 3 + \frac{0{,}45}{5 \cdot 81} \approx 3{,}001.$$

Демек, $\sqrt[5]{243{,}45} \approx 3{,}001$.

11-ГЛАВА. АНЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛ

11.1. Анык эмес интеграл түшүнүгү

Дифференциалдык эсептөөнүн негизги маселеси болуп берилген функциянын туундусун же дифференциалын эсептөө болуп саналат. Ал эми интегралдык эсептөөдө болсо ага тескери болгон маселе каралат: *эгерде $F(x)$ функциясынын туундусу болгон $f(x)$ функциясы белгилүү болсо, б.а. $F'(x)=f(x)$ болсо, анда ал функциянын өзүн, б.а. $F(x)$ функциясын табуу керек.*

Изделүүчү $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын ***баштапкы функциясы*** *деп аталат.*

1-мисал. Кандайдыр бир $F(x)$ функциясын туундусу $2x$ ке барабар, б.а. $F'(x)=2x=f(x)$. $F(x)$ функциясын табуу талап кылынат.

Бул маселенин чыгарылышы болуп x^2 функциясы болот, анткени $(x^2)'=2x$ барабар. Демек, $2x$ функциясынын баштапкы функциясы $F(x)=x^2$ болот экен.

2-мисал. $F'(x)=\sin x=f(x)$ функциясы берилген болсо, анда $F(x)$ функциясын тапкыла.

$(-\cos x)'=\sin x$ болгондуктан, $f(x)=\sin x$ функциясынын баштапкы функциясы $F(x)=-\cos x$ болот.

Аныктама. *Эгерде*

$$F'(x)=f(x) \tag{1}$$

барабардыгы орун алса, анда $F(x)$ функциясы берилген $f(x)$ функциясынын ***баштапкы функциясы*** *деп аталат.*

Эскертүү. Бир эле $f(x)$ функциясы бир нече баштапкы функцияларга ээ болушу мүмкүн. Мисалы, $f(x)=2x$ функциясы $F_1(x)=x^2+2$, $F_2(x)=x^2+5$ ж.б. баштапкы функцияларына ээ болот, себеби $(x^2+2)'=2x$ жана $(x^2+5)'=2x$ барабар.

Жалпылап айтканда, x^2+C көрүнүшүндөгү каалагандай функция $f(x)=2x$ функциясы үчүн баштапкы функция болот, мында $C-$каалагандай турактуу сан, анткени $(x^2+C)'=2x$.

1-теорема. Эгерде $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын баштапкы функциясы болсо, анда $F(x)+C$ $(C=const)$

көрүнүшүндөгү каалаган функция да $f(x)$ функциясынын баштапкы функциясы болот.

Далилдөө. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын баштапкы функциясы болгондуктан (1) барабардык аткарылат. $F(x)+C$ функциясынан туунду алабыз:

$$[F(x)+C]' = F'(x)+C' = F'(x) = f(x).$$

Демек, $F(x)+C$ функциясы $f(x)$ функциясынын баштапкы функциясы болот.

2-теорема. Бир эле функциянын эки баштапкы функциясы бири-биринен турактуу чоңдукка айырмаланат.

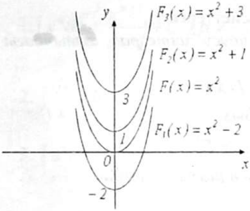
Далилдөө. $f(x)$ функциясынын эки $F_1(x), F_2(x)$ баштапкы функциялары болсун. $F_1(x)-F_2(x)=C$ экенин көрсөтүү керек. $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$ айырмасын карайлы. Туундусун табабыз:

$\Phi'(x)=[F_1(x)-F_2(x)]' = F_1'(x)-F_2'(x) = f(x)-f(x)=0.$

$\Phi'(x)=0 \Rightarrow \Phi(x)=C$. Демек $F_1(x)-F_2(x)=C$.

1- жана 2- теоремалардан төмөнкүдөй корутунду жасоого болот: берилген $f(x)$ функциясынын бир эле $F(x)$ баштапкы функциясын таап, ага каалагандай турактуу чоңдукту кошуу менен анын бардык баштапкы функцияларын табууга болот.

Мына ошентип, $F(x)+C$ түрүндөгү функциялар $f(x)$ функциясынын баштапкы функцияларынын көптүгүн (жыйындысын) түзөт. $F(x)+C$ баштапкы функциялары параллель жайгашкан ийрилердин көптүгүн аныктайт.



Мисал. $f(x)=2x$ функциясынын баштапкы функциясы $F(x)=x^2$ функциясы болот. Ал эми $F_1(x)=x^2-2,\ F_2(x)=x^2+1,$ $F_3(x)=x^2+3, \ldots$ функциялары да баштапкы функциялар болот. Демек, $F(x)=x^2+C$ - баштапкы функциялардын көптүгү.

11.2. Анык эмес интеграл жана анын касиеттери

$f(x)$ функциясынын анык эмес интегралы деп анын $F(x)+C$ баштапкы функцияларынын жыйындысын айтабыз жана төмөнкүдөй жазабыз:

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (2)$$

мында $f(x)$ функциясы ***интеграл астындагы функция****, ал эми $f(x)dx$* ***интеграл астындагы туюнтма*** *деп аталат.*

Берилген функциянын баштапкы функциясын табуу операциясы ***интегралдоо*** *деп аталат. Функцияларды дифференцирлөө жана интегралдоо операциялары - өз ара тескери операциялар болуп эсептелет.*

1-мисал. $\int 2xdx$ анык эмес интегралын тапкыла.

Чыгаруу. $f(x)=2x$ интеграл астындагы функциясынын баштапкы функциясы $F(x)=x^2+C$ болот, анткени $(x^2+C)'=2x$.

Демек, $\int 2xdx = x^2+C$.

2-мисал. $\int \cos 3xdx$ анык эмес интегралын тапкыла.

Чыгаруу. $f(x)=\cos 3x$ интеграл астындагы функциясынын баштапкы функциясы $F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x + C$ болот, анткени $(\frac{1}{3}\sin 3x + C)' = \cos 3x$. Анда, $\int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

Анык эмес интеграл төмөнкүдөй касиеттерге ээ.

1^0. Анык эмес интегралдын туундусу интеграл астындагы функцияга барабар, б.а.

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

Далилдөө. (2) барабардыкты карайбыз.

$$\left[\int f(x)dx\right]' = \left[F(x)+C\right]' = F'(x)+C' = F'(x) = f(x).$$

2^0. Анык эмес интегралдын дифференциалы интеграл астындагы туюнтмага барабар, б.а.

$$d\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' dx = f(x)dx.$$

3^0. $\int dF(x) = F(x)+C$.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C.$$

4^0. Турактуу чоңдукту интеграл белгиси сыртына чыгарууга болот, б.а.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Далилдөө.

$$\int kf(x)dx = \int kF'(x)dx = \int [kF(x)]' dx = \int d[kF(x)] = kF(x)+C.$$

Экинчи жактан $k\int f(x)dx = k(F(x)+C_1) = kF(x)+kC_1 = kF(x)+C.$

Эки жактан тең бир эле жыйынтыкка келдик, демек барабардык туура.

5^0. *Функциялардын суммасынын интегралы интегралдардын суммасына барабар, б.а.*

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Далилдөө. Оң жагынан туунду алабыз

$$(\int f(x)dx + \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' + (\int g(x)dx)' = f(x)+g(x).$$

Натыйжада интеграл астындагы $f(x)+g(x)$ функциясын алдык, демек берилген барабардык туура.

3-мисал. $\int (7x+5\sin 2x)dx$ анык эмес интегралын тапкыла.

Чыгаруу. Алдын ала 5^0, 4^0 касиеттерин пайдаланабыз:

$$\int (7x+5\sin 2x)dx = \int 7xdx + \int 5\sin 2xdx = 7\int xdx + 5\int \sin 2xdx =$$

$$= 7\frac{x^2}{2} - 5\frac{1}{2}\cos 2x + C = \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{2}\cos 2x + C.$$

11.3. Анык эмес интегралдардын негизги таблицасы

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

4. $\int \ell^x dx = \ell^x + C$;

5. $\int \sin xdx = -\cos x + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C$;

12. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})\right| + C$;

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C$;

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$,

15. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$;

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$;

8. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$;

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$,

$(a \neq 0)$; $(a \neq 0,\ x \neq \pm a)$

17. $\int shx dx = chx + C$;

18. $\int chx dx = shx + C$;

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$;

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$, $x \neq 0$.

11.4. Интегралдоо методдору

Математикалык анализде анык эмес интегралды эсептөөнүн бир топ методдору иштелип чыккан. Алардын ичинен жаңы өзгөрмөнү кийирүү жана бөлүктөп интегралдоо методдорун карайбыз.

Жаңы өзгөрмөнү кийирүү методу

$\int f(x)dx$ интегралын көп учурда төмөнкүдөй жөнөкөйлөтсө болот. x өзгөрмөсүнүн ордуна t жаңы өзгөрмөнү кийиребиз: $x = \varphi(t)$. Анда $f(x) = f(\varphi(t))$, $dx = \varphi'(t)dt$ алабыз жана

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \tag{3}$$

(1) формула анык эмес интегралда жаңы өзгөрмөнү кийирүү формуласы деп аталат. Интегралды эсептеп чыккандан кийин мурдагы өзгөрмөгө кайра өтүү керек.

1-мисал. $\int \sin 3x dx$ эсептегиле.

Чыгаруу. $3x = t,\ x = \frac{t}{3},\ dx = \frac{dt}{3}$ ордуна коёбуз.

$$\int \sin 3x dx = \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

2-мисал. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ эсептегиле.

Чыгаруу. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \left| \frac{1}{x} = t,\ x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2},\ x^2 = \frac{1}{t^2} \right| =$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{t^2}} e^t \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int t^2 e^t \frac{dt}{t^2} = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

3-мисал. $\int \frac{dx}{x+5}$ интегралын эсептегиле.

Чыгаруу. $\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = |x+5=t| = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C =$
$= ln|x+5| + C.$

Бөлүктөп интегралдоо методу

Бизге эки функциянын көбөтүндүсүнүн дифференциалы $d(uv) = vdu + udv$ формуласы менен эсептелээри белгилүү. Мындан $udv = d(uv) - vdu$ алабыз. Интегралдап жибергенден кийин

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{4}$$

формулага келебиз.

*(4) формула анык эмес интегралда **бөлүктөп интегралдоо формуласы** деп аталат.*

Бул формуланы $\int udv$ интегралына караганда $\int vdu$ интегралын эсептөө бир топ оңой болгондо пайдалануу керек.

1-мисал. Интегралды эсептегиле $\int xe^x dx$.

Чыгаруу. Интеграл астындагы туюнтманы көбөйтүндү катары карап, төмөнкүдөй белгилейбиз: $u = x,\ dv = e^x dx$. Анда

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

2-мисал. Интегралды эсептегиле $\int ln\,xdx$.

Чыгаруу. $\int ln\,xdx = \begin{vmatrix} u = ln\,x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix} = x\,ln\,x - \int x \cdot \frac{dx}{x} =$

$$= x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x + C = x(ln\,x - 1) + C.$$

12-ГЛАВА. АНЫК ИНТЕГРАЛ

12.1. Анык интеграл түшүнүгү

Жогору жагынан $y = f(x)$ функциясынын графиги, төмөн жагынан Ox огу менен, ал эми каптал жактарынан $x = a$ жана $x = b$ түз сызыктары менен чектелген фигураны ийри сызыктуу трапеция деп атайбыз. Ушул ийри сызыктуу трапециянын аянтын табуу маселеси коюлсун.

Мектеп курсунда тик бурчтуктун, үч бурчтуктун, тегеректин жана башка фигуралардын аянттарын табууну билебиз, ал эми ийри сызыктуу трапециянын аянты менен биринчи жолу кездешип жатабыз.

$[a, b]$ кесиндисин $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n = b$ чекиттеринин жардамында n бөлүккө каалагандай кылып бөлөбүз. Бул бөлүктөрдүн эң сол жакта жайланышканын узундугу $x_1 - x_0$ барабар жана аны Δx_1 аркылуу белгилейбиз. Ушул сыяктуу эле калган бөлүктөрдүн узундуктары $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \Delta x_3 = x_3 - x_2, ..., \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ барабар, б.а. $[a, b]$ кесиндиси узундуктары $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, ..., \Delta x_k, ..., \Delta x_n$ барабар болгон кесиндилерге ажырайт.

$\Delta x_k \ (k = 1, 2, ..., n)$ кесиндилеринин ар бириндe каалагандай ξ_k чекиттерин алабыз. Бардыгы болуп n чекит болот: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_k, ..., \xi_n$. Бул чекиттердин ар бири аркылуу Ox огуна $y = f(x)$ функциясынын графиги менен кесилишкенге чейин перпендикулярларды тургузабыз. Бул перпендикулярлар тиешелүү түрдө $f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), ... \ ... f(\xi_k), ..., f(\xi_n)$ узундуктарына ээ болот. $\Delta x_k \ (k = 1, 2, ..., n)$ кесиндилердин ар бириндe бийиктиги $f(\xi_k)$ барабар болгон тик бурчтуктарды түзөбүз. Алардын ар биринин аянты $f(\xi_k)\Delta x_k$ га барабар. Бардык кесиндилерде тик бурчтуктар түзүлгөндөн кийин n тик бурчтуу тепкичтүү фигура пайда болот. Анын аянты S_n төмөнкүдөй табылат:

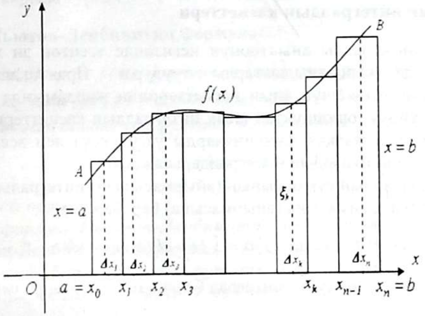
$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_k)\Delta x_k + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$$

же

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (1)$$

(1) сумма интегралдык сумма деп аталат. Ал ийри сызыктуу трапециянын аянтынын жакындаштырылган маанисин аныктайт.

Δx_k кесиндилеринин эң чоңун λ аркылуу белгилейбиз: $\lambda = max\,\Delta x_k$, $k = 1, 2, ..., n$. λ чоңдугу нөлгө умтула тургандай кылып n ди чоңойтобуз.



S_n тепкичтүү фигурасынын аянтынан λ чоңдугу нөлгө умтула тургандай кылып n ди чоңойткондогу пределге өтсөк, анда S аянтына барабар болгон ийри сызыктуу трапециянын аянтын алабыз:

$$S = \lim_{n\to\infty(\lambda\to 0)} S_n = \lim_{n\to\infty(\lambda\to 0)} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Аныктоо. *$[a,b]$ кесиндисин каалагандай кылып кесиндилерге бөлгөнгө жана ал кесиндилерден $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_k, ..., \xi_n$ чекиттерин каалагандай тандап алганга карабастан S_n чоңдугу S санына умтула тургандай S турактуу саны жашаса, анда ал сан $f(x)$ функциясынын $[a,b]$ кесиндисиндеги* ***анык интегралы*** *деп аталат жана*

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

аркылуу белгиленет.

Демек, анык интеграл – бул S_n интегралдык суммасынын $n \to \infty(\lambda \to 0)$ умтулгандагы предели:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty(\lambda\to 0)} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Мында a – интегралдоонун төмөнкү, ал эми b – интегралдоонун жогорку предели деп аталат.

12.2. Анык интегралдын касиеттери

Анык интегралды аныктоонун негизинде эсептөө эң жөнөкөй учурларда да кыйынчылыктарды туудурат. Практикада анык интегралды эсептөө үчүн анын касиеттеринин жардамында эсептөө бир топ ыңгайлуу, ошондуктан анык интегралдын касиеттерин карап көрөлү. Каралып жаткан функцияларды үзгүлүксүз деп эсептейбиз, бул учурда функциялардын интегралдары жашайт.

1^0. Функциялардын суммасынын (айырмасынын) интегралы интегралдардын суммасына (айырмасына) барабар, б.а.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

2^0. Турактуу чоңдукту интеграл белгисинин сыртына чыгарууга болот, б.а.

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k$ – турактуу сан.

3^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4^0. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

5^0. Эгерде $[a,b]$ интегралдоо кесиндиси $[a,c]$ жана $[c,b]$ кесиндилерден турса, анда интеграл $[a,c]$ жана $[c,b]$ кесиндилердеги интегралдардын суммасынан турат, б.а.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6^0. (Интегралды баалоо). Эгерде $f(x)$ функциясынын $[a,b]$ кесиндисиндеги бардык маанилери $m \le f(x) \le M$ шартын канааттандырса жана $a < b$ болсо, анда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

барабарсыздыгы аткарылат.

7^0. (Орточо маани жөнүндөгү теорема). Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда бул аралыкта

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad a < c < b$$

шарты аткарыла тургандай c чекити табылат.

12.3. Ньютон-Лейбництин формуласы

Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, ал эми $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын $[a,b]$ кесиндисиндеги баштапкы функциясы болсо, анда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

формуласы орун алат.

(2) формула ***Ньютон-Лейбництин формуласы*** *деп аталат.*

Ньютон-Лейбництин формуласы интеграл астындагы функциянын жок дегенде бир баштапкы функциясы белгилүү болгондо аныкинтегралды эсептөөгө мүмкүнчүлүк берет.

1-мисал. Интегралды эсептегиле: $\int_1^2 x^2 dx$.

Чыгаруу. $f(x) = x^2$ интеграл астындагы функциясынын баштапкы функциясы $F(x) = \frac{x^3}{3}$ болот, ошондуктан $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 =$

$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ алабыз.

2-мисал. Интегралды эсептегиле: $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.

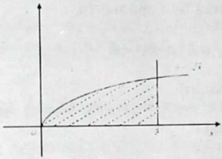
Чыгаруу. $f(x) = \sin x$ интеграл астындагы функциянын баштапкы функциясы $F(x) = -\cos x$ болот, ошондуктан

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

болот.

3-мисал. $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

Чыгаруу. Чиймени карайбыз.



$$S=\int_0^3 \sqrt{x}dx=\int_0^3 x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^3=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3=\frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}}-0=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3^3}=\frac{2}{3}3\sqrt{3}=2\sqrt{3}\ .$$

Демек, бул фигуранын аянты $S=2\sqrt{3}$.

12.4. Аныk интегралда жаңы өзгөрмөнү кийирүү

Теорема. *Эгерде*

1) $t\in[\alpha,\beta]$ болгондо $x=\varphi(t)$ функциясы жана анын туундусу $x'=\varphi'(t)$ үзгүлтүксүз;

2) $t\in[\alpha,\beta]$ болгондо $x=\varphi(t)$ функциясынын маанилеринин областы $[a,b]$ кесиндиси болсо;

3) $\varphi(\alpha)=a$ жана $\varphi(\beta)=b$ болсо, анда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

формуласы орун алат.

(3) формула аныk интегралда **жаңы өзгөрмөнү кийирүү** формуласы деп аталат.

4-*мисал.* Аныk интегралды эсептегиле $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2xdx$.

Чыгаруу. $2x=t$ деген жаңы өзгөрмөнү кийиребиз, анда интеграл астындагы туюнтма $\frac{1}{2}\sin tdt$ көрүнүшүндө болот. Анык интегралда анык эмес интегралдан айырмаланып интегралдоо пределдерин да өзгөртүү керек: $x=0$ болгондо, $2x=t$ формуласына койсок $t=0$ болот жана $x=\frac{\pi}{4}$ болгондо, $2x=t$ формуласына койсок $t=\frac{\pi}{2}$ болуп өзгөрөт.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx = \left|\begin{array}{ll} 2x=t \quad x=\frac{t}{2} & dx=\frac{dt}{2} \\ x=0 \quad t=0 & \\ x=\frac{\pi}{4} \quad t=\frac{\pi}{2} & \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

12.5. Анык интегралда бөлүктөп интегралдоо методу

Теорема. *Эгерде* $u=u(x)$ *жана* $v=v(x)$ *функциялары* $[a,b]$ *кесиндисинде үзгүлтүксүз туундуга ээ болсо, анда*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (4)$$

формуласы орун алат.

(4) формула анык интегралды **бөлүктөп интегралдоо** формуласы деп аталат.

5-мисал. Анык интегралды эсептегиле $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$.

Чыгаруу. Интеграл астындагы туюнтманы эки бөлүккө бөлөбүз: $u=x,\ dv=\sin xdx.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \left|\begin{matrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{matrix}\right| = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)dx =$$

$$= -(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

6-мисал. Анык интегралды эсептегиле $\int_1^e x\ln x dx$.

Чыгаруу. Интеграл астындагы туюнтманы эки бөлүккө бөлөбүз: $u = \ln x,\ dv = xdx.$

$$\int_1^e x\ln x dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_0^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_0^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - (\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

13-ГЛАВА. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

13.1. Негизги түшүнүктөр

Көп учурда геометриялык жана физикалык маселелерди чыгарууда изделүүчү функцияны, көз каранды эмес өзгөрмөнү жана изделүүчү функциянын туундусун байланыштырып туруучу теңдемелерди кароого туура келет. Мындай теңдемелер дифференциалдык теңдемелер деп аталат, ал эми теңдемени канааттандарган функциялар дифференциалдык ***теңдеменин чечими*** *деп аталат.*

Дифференциалдык теңдеменин чечимин табуу аны ***интегралдоо****, ал эми чечиминин графиги –* ***интегралдык ийри*** *деп аталат.*

Биринчи тартиптеги дифференциалдык тендемени жалпы учурда

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

Эгерде (1) тендемени y' биринчи тартиптеги туундуга карата чечүүгө мүмкүн болсо, б.а.

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

анда аны туундуга карата чечилген **биринчи тартиптеги** дифференциалдык тендеме деп атайбыз.

Эгерде изделүүчү функция бир гана өзгөрмөдөн көз каранды болсо, анда теңдеме ***кадимки дифференциалдык теңдеме*** *деп аталат. Эгерде изделүүчү функция эки же андан көп өзгөрмөлөрдөн көз каранды болсо, анда теңдеме* ***жекече туундулуу*** *дифференциалдык теңдеме деп аталат.*

Теңдемеге катышкан туундунун эң жогорку тартиби ***теңдеменин тартиби*** *деп аталат.*

Биз негизинен (2) көрүнүшүндөгү кадимки дифференциалдык теңдемелерди карайбыз.

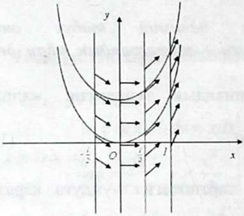
(1) теңдеме (x, y) чекитинин координаталары менен ушул чекитке интегралдык ийриге жүргүзүлгөн жанымаңын бурчтук коэффициенти y' менен байланышты (көз карандылыкты) түзөт.

Демек, (2) дифференциалдык теңдеме Oxy тегиздигиндеги **багыттардын талаасын** (багыттардын көптүгүн) берет. Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин геометриялык мааниси ушундай.

Ийринин бардык чекиттеринде багыттар талаасы бирдей болсо, анда ал ийрини ***изоклина*** *деп атайбыз.* Изоклиналардын жардамында жакындаштырылган түрдө интегралдык ийрилерди тургузууга болот. $y' = C$ десек, изоклинанын теңдемесин алсак болот, б.а. $f(x, y) = C$.

1-мисал. Изоклиналардын жардамында $y' = 2x$ теңдемесинин интегралдык ийрилеринин графигин чийгиле.

Чыгаруу. Бул теңдеменин изоклиналарынын теңдемеси $2x = C$, б.а. Oy огуна параллель болгон $x = \dfrac{C}{2}$ түз сызыктары болот. Түз сызыктардын чекиттеринде Ox огу менен α бурчун түзө тургандай кылып багытка ээ болгон кесиндилерди жүргүзөбүз. Туундунун геометриялык мааниси боюнча бурчтун тангенси C га барабар болуш керек: $tg\alpha = C$.



C га ар кандай маани бирип көрөбүз: $C = 0$ болгондо $x = 0$ болот, анда $tg\alpha = 0$, ошондуктан $\alpha = 0$;

$C = 1$ болгондо $x = \dfrac{1}{2}$ болот, анда $tg\alpha = 1$, ошондуктан $\alpha = 45^0$;

$C = -1$ болгондо $x = -\dfrac{1}{2}$ болот, анда $tg\alpha = -1$, ошондуктан $\alpha = -45^0$;

$C = 2$ болгондо $x = 1$ болот, анда $tg\alpha = 2$, ошондуктан

$\alpha = arctg\, 2 \approx 63^0$ ж.б.

Мына ошентип, $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 1$ төрт изоклиналарды алдык. Бул изоклиналарда Ox огуна белгилүү бурч менен бир топ багыттуу кесиндилерди жайгаштырып, алардын багыты боюнча ийрилерди тургузабыз. Алар параболалардын көптүгүн берет.

Жалпы учурда дифференциалдык теңдемени интегралдоо чексиз көп чечимдерге алып келет (алар бири биринен турактуу гана чоңдукка айырмаланат). Мисалы, $y' = 5x$ теңдемесинин чечими

$y=\frac{5x^2}{2}$ функциясы болот жана ошондой эле $y=\frac{5x^2}{2}+3$, $y=\frac{5x^2}{2}-4$, $y=\frac{5x^2}{2}+\sqrt{5}$ функциялары да чечим болот.

Жалпылап айтканда, чечим $y=\frac{5x^2}{2}+C,\ C-const$ түрүндө болот.

Дифференциалдык теңдеменин конкреттүү чечимин алуу үчүн изделүүчү функция кандайдыр бир кошумча шартты канааттандырыш керек.

Эгерде $x=x_0$ болгондо y функциясы берилген y_0 маанисине барабар болсо, б.а. $y=y_0$ болсо, анда баштапкы шарт берилди деп эсептейбиз. Баштапкы шарт

$$y(x_0)=y_0 \text{ же } y\big|_{x=x_0}=y_0 \qquad (3)$$

түрдө жазылат.

Каалаган бир турактууну кармап турган $y=\varphi(x,C)$ функциясы биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин **жалпы чечими** болушу үчүн

1. Ар бир C нын фиксирленген маанисинде $\varphi(x,C)$ функциясы дифференциалдык теңдеменин чечими болушу керек.
2. (3) баштапкы шартты канааттандыра тургандай C турактуу чоңдугунун конкреттүү маанисин табууга мүмкүн болушу керек.

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин ***жекече чечими*** *деп, $y=\varphi(x,C)$ жалпы чечиминен C турактуу чоңдугунун конкреттүү $C=C_0$ маанисинде алынган функцияны айтабыз.*

Эгерде дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими айкын эмес түрдө табылса, б.а. $\Phi(x,y,C)=0$ көрүнүшүндө болсо, анда мындай чечим дифференциалдык теңдеменин ***жалпы интегралы*** *деп аталат.* Ал эми $\Phi(x,y,C_0)=0$ барабардыгы теңдеменин жекече интегралы деп аталат.

Геометриялык жактан $y=\varphi(x,C)$ функциясы Oxy тегиздигиндеги интегралдык ийрилердин көптүгүн берет, ал эми $y=\varphi(x,C_0)$ функциясы бул көптүктүн (x_0,y_0) чекити аркылуу өтүүчү бир ийриси болот.

(2), (3) маселеси **Кошинин маселеси** деп аталат.

Теорема. ***(****Коши маселесинин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы****)*** *Эгерде (2) теңдемедеги $f(x,y)$ функциясы жана анын*

$f'_y(x,y)$ жекече туундусу (x_0,y_0) чекитин камтыган кандайдыр бир D областында үзгүлтүксүз болсо, анда (3) баштапкы шартты канааттандырган жалгыз $y=\varphi(x)$ функциясы жашайт.

Бул теореманын геометриялык мааниси төмөнкүдөй: (x_0,y_0) чекити аркылуу дифференциалдык теңдеменин жалгыз интегралдык ийриси өтөт.

13.2. Өзгөрмөлөрү ажыратылуучу теңдемелер

(2) дифференциалдык теңдеме өзгөрмөлөрү ажыратылуучу теңдеме деп аталат, эгерде аны

$$y'=\varphi(x)\cdot\psi(y) \tag{4}$$

көрүнүшүндө жазууга мүмкүн болсо, б.а. теңдеменин оң жагы эки функциянын көбөйтүндүсү түрүндө көрсөтүлсө.

$\varphi(x)$ жана $\psi(y)$ функциялары $a<x<b,\ c<y<d$ интервалдарында үзгүлтүксүз жана $\psi(y)\neq 0$ болсун деп эсептейли.

(4) теңдеменин эки жагын dx ке көбөйтүп, $\psi(y)$ ке бөлүп

$$\frac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx$$

алабыз.

Бул теңдемеде сол жагы бир өзгөрмөдөн, оң жагы башка өзгөрмөдөн көз каранды болуп турат, б.а. өзгөрмөлөрү ажыратылып турат. Интегралдап жиберип

$$\int\frac{dy}{\psi(y)}=\int\varphi(x)dx+C \tag{5}$$

(5) теңдеменин жалпы интегралын алабыз.

2-мисал. Теңдемени чыгаргыла $y'=x(y^2+1)$.

Чыгаруу. Теңдемени $\frac{dy}{dx}=x(y^2+1)$ көрүнүшүндө жазып алабыз. Өзгөрмөлөрдү ажыратабыз: $\frac{dy}{y^2+1}=xdx$. Мында $\psi(y)=y^2+1,\ \varphi(x)=x$ барабар. Теңдемени интегралдап

$$\int\frac{dy}{y^2+1}=\int xdx+C,$$

XOY тегиздигинде теңдеменин жалпы интегралын табабыз:

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C. \tag{6}$$

(6) формуланы y ке карата чечип

$$y = tg(\frac{x^2}{2} + C), \ -\frac{\pi}{2} < \frac{x^2}{2} + C < \frac{\pi}{2}$$

алабыз.

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелерди

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

түрүндө да жазууга болот, мында $P(x,y)$, $Q(x,y)$ функциялары белгилүү функциялар. (7) теңдемеде x жана y өзгөрмөлөрү тең күчтүү, б.а. каалаган бирөөсүн экинчисинен функция деп, караса болот.

Өзгөрмөлөрү ажыратылуучу дифференциалдык теңдемелерди кээде x жана y ке карата симметриялык формада жазышат:

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0, \tag{8}$$

мында $M(x),\ N(y),\ P(x),\ Q(y)$ – функциялары $a < x < b,\ c < y < d$ интервалында үзгүлтүксүз.

Эгерде $a < x < b,\ c < y < d$ интервалдарда $P(x)$ жана $N(y)$ функциялары нөлдөн айырмалуу болсо, анда (8) теңдеменин бардык чечимдерин $\{a < x < b,\ c < y < d\}$ областында табуу үчүн $N(y) \cdot P(x)$ көбөйтүндүсүнө бөлүп жиберип, андан кийин интегралдайбыз

$$\int \frac{M(x)}{P(x)} dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)} dy = C. \tag{9}$$

(9) формула (8) теңдеменин жалпы интегралы болот.

Эскертүү. (8) теңдемени $N(y) \cdot P(x)$ көбөйтүүчүсүнө бөлүп жатканда кээ бир чечимдер эске алынбай, жоголуп калышы мүмкүн, ошондуктан $N(y) \cdot P(x) = 0$ теңдемесин өзүнчө чечип өзгөчө чечимдерин табуу керек. Өзгөчө чечимдер жалпы чечимден келип чыкпайт.

3-мисал. (Коши маселеси) $y(4) = 1$ баштапкы шартын канаатандырган $y' = -\frac{y}{x}$ теңдеменин чечимин тапкыла.

Чыгаруу. Теңдемени $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ көрүнүшүндө жазып өзгөрмөлөрдү ажыратабыз $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Интегралдап, төмөндөгүнү алабыз:

$$ln|y| = ln|c| - ln|x|,$$

б.а. $y = \frac{C}{x}$ - дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими.

Бул жалпы чечим геометриялык жактан гиперболалардын көптүгүн берет. Бул гиперболалардын ичинен $(4,1)$ чекити аркылуу өткөнүн бөлүп алабыз. Жалпы чечимге $x = 4,\ y = 1$ ордуна коюп $1 = \frac{C}{4},\ C = 4$ алабыз.

Мына ошентип, $y' = -\frac{y}{x}$ теңдеменин $y = \frac{4}{x}$ - жекече чечимин таптык.

13.3. Бир тектүү дифференциалдык теңдемелер

Биринчи тартиптеги бир тектүү дифференциалдык теңдемелер өзгөрмөлөрү ажыратылуучу теңдемелерге келтирүү аркылуу чыгарылат.

*$f(x,y)$ функциясы n-тартиптеги **бир тектүү функция** деп аталат, эгерде каалаган t мааниси үчүн*

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \tag{10}$$

теңдештиги орун алса.

Мисалы, $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$ - функциясы 3-тартиптеги бир тектүү функция болот, анткени

$f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2(ty) = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x,y)$ аткарылат.

*Эгерде (2) теңдемесинин оң жагы нөлүнчү тартиптеги бир тектүү функция болсо, анда ал **бир тектүү** дифференциалдык теңдеме деп аталат.*

Бул бир тектүү теңдемени атайын подстановка менен интегралдоо өзгөрмөлөрү ажыратылуучу теңдемелерге алып келет.

$f(x,y)$ функциясы нөлүнчү тартиптеги бир тектүү функция болгондуктан каалаган t үчүн $f(tx,ty) = f(x,y)$ барабардыгы орун алат. Анда, $t = \frac{1}{x}$ ордуна коюп

$$f(x,y) = f(1,\frac{y}{x})$$

алабыз. Бул берилген теңдеменин оң жагы бир аргументтен, б.а. $\frac{y}{x}$ катышынан көз каранды болот: $f(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$. Анда теңдемени

$$y' = \varphi(\frac{y}{x}) \qquad (11)$$

түрүндө жаза алабыз. $\frac{y}{x} = u$ подстановкасын пайдаланып ($y = ux$) (11) теңдемени

$$u'x + u = \varphi(u) \text{ же } u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}$$

көрүнүштө алабыз.

Бул теңдеме u белгисиз функциясына карата өзгөрмөлөрү ажыратылуучу теңдеме, б.а. $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

$a < u < b$ интервалында $\varphi(u)$ функциясы үзгүлтүксүз жана $\varphi(u) - u \neq 0$ болсун. Анда жогорудагы теңдемени интегралдап

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$\{a < u < b,\ x > 0\}$ жана $\{a < u < b,\ x < 0\}$ областтарында теңдеменин жалпы интегралын алабыз. Жардамчы u функциясын x жана y маанилери менен алмаштырып $\left\{a < \frac{y}{x} < b,\ x > 0\right\}$ жана $\left\{a < \frac{y}{x} < b,\ x < 0\right\}$ областтарда чечимди квадратураларда алабыз.

Бир тектүү теңдеме көп учурда (7) көрүнүшүндөгү дифференциалдык формада берилет.

Эгерде $P(x,y)$ жана $Q(x,y)$ функциялары бирдей тартиптеги бир тектүү функциялар болсо, анда (7) дифференциалдык теңдеме ***бир тектүү*** *деп аталат.*

(7) теңдемеге $y = ux$ подстановкасын колдонуп өзгөрмөлөрү ажыратылуучу теңдемеге алып келсек болот.

4-мисал. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ теңдемесинин жалпы интегралын тапкыла.

Чыгаруу. $P(x,y) = x^2 - y^2,\ Q(x,y) = 2xy$ функциялары 2-тартиптеги бир тектүү функциялар болгондуктан, б.а.

$$P(tx,ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2(x^2 - y^2) = t^2 P(x,y),$$

$$Q(tx,ty) = 2(tx)(ty) = t^2(2xy) = t^2 Q(x,y)$$

болгондуктан, берилген теңдеме бир тектүү. Анда $y = ux$ подстановкасын берилген теңдемеге коебуз: $dy = xdu + udx$,

$$(x^2 - (ux)^2)dx + 2x(ux)(xdu + udx) = 0,$$

$$(x^2 - u^2x^2)dx + 2x^3udu + 2x^2u^2dx = 0,$$

$$x^2(1 - u^2 + 2u^2)dx + 2x^3udu = 0, \; x^2(1 + u^2)dx + 2x^3udu = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{1+u^2} = 0, \; \frac{dx}{x} + \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = 0,$$

Интегралдайбыз

$$ln|x| + ln(1+u^2) = C_1, \; ln(|x| \cdot (1+u^2)) = ln\, e^{C_1}, \; |x| \cdot (1+u^2) = e^{C_1}.$$

Белгилөө жүргүзөбүз $C = e^{C_1}$, $C > 0$. Анда $|x| \cdot (1+u^2) = C$ алабыз. u нун ордуна $\dfrac{y}{x}$ ти коюп $x^2 + y^2 = Cx$ - бирилген теңдеменин жалпы интегралын алабыз.

13.4. Сызыктуу теңдемелер. Я.Бернуллинин теңдемеси

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме сызыктуу деп аталат, эгерде ал изделүүчү функцияга жана анын биринчи тартиптеги туундусуна карата сызыктуу болсо, б.а. теңдемени

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{12}$$

көрүнүшүндө жазууга мүмкүн болсо.

Мисалы, $y' + x^2y = x^7$, $y' + x + e^x y = 0$, $y' + y = 0$ ж.б. теңдемелери сызыктуу болот.

Эгерде (12) теңдемеде $Q(x) \equiv 0$ болсо, анда

$$y' + P(x)y = 0 \tag{13}$$

*теңдеме **сызыктуу бир тектүү** теңдеме деп аталат.*

*Эгерде (12) теңдемеде $Q(x)$ теңдеш түрдө нөлгө барабар болбосо, анда (12) теңдеме **сызыктуу бир тектүү эмес** теңдеме деп аталат.*

(12) сызыктуу теңдемени $a < x < b$ интервалында карайбыз. Бул интервалда $P(x)$, $Q(x)$ функциялары үзгүлтүксүз. Сызыктуу теңдеме квадратураларда интегралдана турганын көрсөтөбүз.

(12) теңдемени интегралдоонун эки методун карап чыгабыз: **Я.Бернулли** жана **Лагранждын методдору.**

Бернуллинин методунда теңдеменин чечими эки функциянын көбөйтүндүсү түрүндө изделет: $y = u(x) \cdot v(x)$, мында $u(x)$ жана $v(x)$ функциялары белгисиз функциялар. Бул функциялардын каалаган бирөөсүн тандап алууга болот.

Туундуну табабыз: $y' = u'v + uv'$. Изделүүчү функция y жана изделүүчү функциянын туундусун y' (12) теңдемеге койсок $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ же

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x) \qquad (14)$$

алабыз. $v = v(x)$ функциясын кашаанын ичиндеги туюнтма нөл боло тургандай кылып тандайбыз, б.а. $v' + P(x)v = 0$ бир тектүү дифференциалдык теңдемени чыгарабыз. $v(x) \neq 0$ деп эсептеп чечимди табабыз:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0,\ \frac{dv}{v} = -P(x)dx,\ \int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx,\ ln|v| = -\int P(x)dx + ln|C|.$$

$v = v(x)$ функциясын каалагандай кылып тандоого мүмкүн болгондуктан $C = 1$ деп $v = e^{-\int P(x)dx}$ алабыз.

Табылган v функциясын (14) ке коюп

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдемени алабыз

$$\frac{du}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x),\ du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,\ u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Кайра y өзгөрмөсүнө өтүп

$$y = u \cdot v = (\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)e^{-\int P(x)dx}$$

берилген теңдеменин чечимин табабыз.

5-мисал. $y' + 2xy = 2x$ теңдемесин интегралдагыла.

Чыгаруу. $y = u \cdot v$ подстановкасын пайдаланабыз. Анда $u'v + uv' + 2xuv = 2x,\ u'v + u(v' + 2xv) = 2x$ алабыз. Кашаанын ичиндеги туюнтманын теңдеме катары чыгарып v ны табабыз:

$$v' + 2xv = 0,\ \frac{dv}{dx} = -2xv,\ \frac{dv}{v} = -2xdx,\ ln|v| = -x^2,\ v = e^{-x^2}.$$

Табылган v ны теңдемеге коюп

$$u'e^{-x^2} = 2x,\ \frac{du}{dx} = 2xe^{x^2},\ du = 2xe^{x^2}dx,\ \int du = \int 2xe^{x^2}dx,$$

$\int du = \int e^{x^2}d(x^2),\ u = e^{x^2} + C$ алабыз.

Мына ошентип, берилген теңдеменин жалпы чечими

$$y = u \cdot v = (e^{x^2} + C)e^{-x^2} = 1 + Ce^{-x^2}$$

көрүнүшүндө алабыз.

13.5. Лагранждын методу (турактуу чоңдукту вариациялоо)

Ал үчүн бир тектүү болгон (13) теңдемени карайбыз: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$. Бул теңдеменин өзгөрмөлөрү ажырайт, б.а.

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx, \ \ ln|y|=-\int P(x)dx+ln|C|,$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx},$$

мында C – нөлдөн айырмалуу турактуу чоңдук.

Турактуу чоңдукту вариациялоо методунун өзгөчөлүгү турактуу C чоңдугун $C=C(x)$ деп, теңдеменин жалпы чечимин

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{15}$$

көрүнүштө издейбиз.

(15) туундусун табабыз:

$$y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x).$$

y' туундусун жана y изделүүчү функцияны (12) теңдемеге коебуз:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x)+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x), \ \ C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C \tag{16}$$

алабыз. (16) формуланы (15) га коюп теңдеменин жалпы чечимин табабыз:

$$y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx}.$$

6-мисал. $y'+2xy=2x$ теңдемени Лагранждын методу менен чыгаргыла.

Чыгаруу. Бир тектүү теңдеменин жалпы чечимин табабыз:

$$y'+2xy=0, \ \frac{dy}{dx}=-2xy, \ \ \frac{dy}{y}=-2xdx, \ ln|y|=-x^2+ln|C|,$$

$$y=Ce^{-x^2}, \ C=C(x), \ y=C(x)e^{-x^2}.$$

Эми туундусун жана изделүүчү функциясы берилген теңдемеге коебуз

$$C'(x)e^{-x^2}-2xC(x)e^{-x^2}+2xC(x)e^{-x^2}=2x, \ \ C'(x)e^{-x^2}=2x,$$

$$C'(x)=2xe^{x^2}, \ C(x)=\int 2xe^{x^2}dx=e^{x^2}+C.$$

Табылган $C(x) = e^{x^2} + C$ функцияны $y = C(x)e^{-x^2}$ бир тектүү теңдеменин жалпы чечимине коебуз да берилген теңдеменин жалпы чечимин табабыз $y = (e^{x^2} + C)e^{-x^2} = 1 + Ce^{-x^2}$.

13.6. Я. Бернуллинин теңдемеси

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,\ n \in R,\ n \neq 0,\ n \neq 1 \qquad (17)$$

*көрүнүшүндөгү теңдеме **Я. Бернуллинин теңдемеси** деп аталат.* (17) теңдемени сызыктуу теңдемеге келтирсе болот.

Эгерде $n = 0$ болсо, анда теңдеме сызыктуу, ал эми $n = 1$ болсо теңдеме өзгөрмөлөрү ажыратылуучу болот.

Жалпы учурда (17) теңдемени $y^n \neq 0$ бөлүп

$$y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$$

алабыз. $y^{-n+1} = z$ белгилөөсүн жүргүзөбүз. Анда $z' = \dfrac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}y'$.

Мындан $y^{-n}y' = \dfrac{z'}{1-n}$ алабыз. Теңдемеге табылгандарды койсок

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

сызыктуу теңдемеге келебиз.

Демек, $y^{-n+1} = z$ подстановка аркылуу сызыктуу эмес теңдемени сызыктуу теңдемеге келтирсе болот экен. Сызыктуу теңдеменин чечими бизге белгилүү. Практикада (17) теңдемени сызыктуу теңдемеге алып келбей туруп эле Бернуллинин методун пайдаланган ыңгайлуу ($y = u \cdot v$).

ПАЙДАЛАНЫЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. Учебное пособие для студентов физ.-мат. Фак. Пед. Ин-тов. – М.: Просвеөение, 1986. – 336 с.
2. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сб. зад. По анал. Геометрии. –М.: Наука, 1964.-440с.
3. Бекбоев И.Б. Жогорку математиканын жалпы курсу: Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн окуу куралы. – Б.: Мектеп, 2000. – 224 б.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. – с 5 – 30.
6. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. – М.: наука, 1969. – 155 с.
7. Вуколов Э.А. и др. Теория вероятностей и мат. Статистика. –М.: Наука, 1990. – с. 9 – 57.
8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и мат. Статистика. – М.: Высшая школа, 1998. – с. 17 – 63.
9. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998.- с. 22 – 23.
10. Грес П.В. Математика для гуманитариев: Учебное пособие. – М.: Юрайт, 2000. – 112 с.
11. Дорофеева А.В. Учебник по высшей математике для философских факультетов университетов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 423 с.
12. Задачник по курсу математического анализа. Под ред. Виленкина Н.Я. Часть 1. – М.: Просвещение, 1971. – с. 216 – 220.
13. Задачник-практикум по высшей математике: Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная: Учебное пособие / В.А. Волков, А.Н. Григорьева, Т.А. Ефимова и др. Под ред. В.А. Волкова. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 224 с.
14. Зайцев И.Л. Элементы высшей математики для техникумов. – М.: Наука, 1970. – 424 с.
15. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т. 1, Т. 2. - М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.
16. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т. 3, Т. 2. - М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 240 с.

17. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
18. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
19. Кутасов А.Д. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1985. – 480 с.
20. Луканкин Г.Л. и др. Высшая математика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. 2120 "Общетехн. дисциплины и труд". – М.: Просвещение, 1988. – 431 с.
21. Ляпин С.Е. и др. Сборник задач по элементарной алгебре. – М.: Просвещение, 1973. – с. 238 – 250.
22. Математика. Кыскача энциклопедия / башкы ред. М. борбугулов. – Бишкек: КСЭнин Башкы редакциясы, 1990. – 536 с.
23. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике.-М.: Наука, 1969.- с. 170-199.
24. Назаров М., Борубаев Т., Назаров М.М., Мамасадыкова С. Ыктымалдуулуктар теориясынын элементтери. Экономикалык, соода жана техникалык жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн окуу-методикалык колдонмо. – Жалал-Абад: Жалал-Абад обл. типографиясы, 1994. – 117 б.
25. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / 4-е изд. – М.:Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
26. Райхмист Р.Б. Графики функций. – М.: Высшая школа, 1991. – 160 с.
27. Слободская В.А. Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1969.- 544 с.
28. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. – М.: Наука, 1974. – с. 199 – 222.
29. Тарасов Н.П. Курс высшей математики для техникумов. – М.: Наука, 1971. – 448 с.
30. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1968. – 440 с.
31. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник. –М.: Наука, Гл. ред физ.-мат. лит-ры, 1985. – 128 с.
32. Шнейдер В.Е. и др. Краткий курс высшей математики. Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. школа, 1972. – 640 с.

Сопуев У.А

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА

Окуу колдонмо Ош МУнун Окумуштуулары Кеңешинин чечими менен жарык көрүүгө сунушталды

Редактору: Түголбаева Айнагүл
Техн. редактору: Карабаев Ражапали
Компьютердик корректору: Карагулова Сайкал
Мукабасын жасаган: Гадиев Расул

Терүүгө 20.09.2015. берилди . Басууга 20.10.2015 кол коюлду. Кагаздын форматы 60x84 $^1/_{16}$. Офистик ыкма менен басылды. Көлөмү 10 басма табак. Нускасы: 500. Келишим баада

«Кагаз Ресурстары» басмаканасында офсеттик ыкма менен басылды.
Ош шаары, А.Мамыров көчөсү, 86-г
Тел: (3222) 4 69 16
e-mail: kagaz_resurstatry@bk.ru